ABRISS

DER

GESCHICHTE DER POTENTIALTHEORIE.

INAUGURAL-DISSERTATION

VERFASST UND DER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT

DER

KÖNIGLICHEN JULIUS-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT WÜRZBURG

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

VORGELEGT

VON

MAX BACHARACH

ASSISTENT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK

AN DER K. KREISREALSCHULE IN WÜRZBURG.

WÜRZBURG.

DRUCK DER THEIN'SCHEN DRUCKEREI (STÜRTZ).

1883.

Inhaltsübersicht.

		Seite
§ 1.	Einleitung	1
§ 2.	Die Potential-Funktion	4
§ 3.	Die Laplace-Poisson'sche partielle Differentialgleichung	6
§ 4.	Die charakteristischen Eigenschaften des Körper-Potentials. — Ausnahmestellen	13
§ 5.	Das Flächen-Potential und seine charakteristischen Eigenschaften	16
§ 6.	Das Linien- und Punkt-Potential	22
§ 7.	Die Green'schen Formeln. — Green's „Essay" und Gauss' „Allgemeine Lehrsätze"	22
§ 8.	Einige Gauss'sche Theoreme. — Arithmetisches Mittel, Maxima und Minima des Potentials	25
§ 9.	Die fundamentalen, funktionentheoretischen Sätze der Potentialtheorie von Green, Gauss, Chasles, Thomson, C. Neumann. — Dirichlet's Prinzip	28
§ 10.	Aequipotentielle Massenverteilung. — Potentialflächen	37
§ 11.	Das Potential in der Physik	42
§ 12.	Green'sche Belegung. — Green'sche Funktionen. — Doppelbelegung	52
§ 13.	Die Methoden zur Lösung der Potentialaufgaben	57
§ 14.	Transformation durch die Methode der reciproken Radii vectores	66
§ 15.	Das logarithmische Potential	68
§ 16.	Das Potential im n-dimensionalen Raume, in dreifach sowie mehrfach ausgedehnten Gauss'schen und Riemann'schen Räumen	75

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549819_0237

§ 1.

Einleitung.

Nachdem Newton das Gravitations-Gesetz aufgestellt hatte, trat an die Wissenschaft die Aufgabe heran, unter Zugrundelegung dieses Gesetzes die Grösse der Kraft zu bestimmen, mit welcher gegebene Körper sich gegenseitig anziehen, sowie die Richtung anzugeben, nach welcher diese Anziehung erfolgt. Zuerst wurden die einfachsten, für Astronomie und physikalische Geographie wichtigsten Fälle in Angriff genommen und behandelt, nämlich die Bestimmung der Attraktion der Kugel, des Sphäroids und des Ellipsoids auf einen materiellen Punkt. Zur Lösung der gestellten Probleme wurde die synthetische (direkte) Methode eingeschlagen.

Newton selbst machte in dieser Richtung den Anfang, ihm folgten bald auf gleichem oder ähnlichem Wege Cotes, Stirling, Clairaut, Euler, D. Bernoulli, Maclaurin, D'Alembert, und förderten sehr wichtige Einzelresultate zu Tage. Es sei nur erinnert an die grösstenteils von Newton[1])* aufgestellten Sätze über die Attraktion einer homogenen Kugel und Kugelschale sowie einer aus concentrischen homogenen Schichten zusammengesetzten Kugel auf einen beliebigen äusseren oder inneren Punkt; ferner an den ebenfalls von Newton gefundenen Satz, dass eine von zwei ähnlichen concentrischen Ellipsoiden begrenzte homogene Schale auf einen beliebigen Punkt ihres inneren Hohlraumes keine Wirkung ausübt. Besonders hervorgehoben sei noch der berühmte Meclaurin'sche Satz über die Anziehung zweier confocaler Ellipsoide auf einen Punkt einer Hauptaxe.[2])

In den von obgenannten Autoren gefundenen Theoremen erblickte Lagrange eine Herausforderung der synthetischen Methode in der Mathematik an die Analytiker, dahin gehend, dass diese durch Aufsuchen eines analytischen Verfahrens an der Attraktionstheorie ihre Kraft erproben mögen. Die erste von Lagrange unserem Gegenstande gewidmete

---

* Die Zahlen beziehen sich auf die am Ende eines jeden § angehängten Noten.

Arbeit (1775)[3]) ist nach mehrfacher Richtung von grossem historischen Interesse. Lagrange formulirte zuerst die Aufgabe: Den allgemeinen Ausdruck für die Kraft zu finden, mit welcher ein beliebig gestalteter gegebener Körper einen willkürlich gelegenen Punkt anzieht, unter der Voraussetzung, dass die Kraft, mit welcher jeder Teil des Körpers den Punkt anzieht, eine (beliebige) Funktion des gegenseitigen Abstandes beider ist. Er zeigte, dass, wenn bei Zugrundelegung rechtwinkeliger Coordinaten x', y', z' die Coordinaten des Körperelementes $dm = dx'\,dy'\,dz'$, x, y, z diejenigen des angezogenen Punktes (dessen Masse = 1 angenommen werde) sind, $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ ihre gegenseitige Entfernung und $f(r)$ die Anziehungsfunktion bedeutet, die Componenten der Anziehung dieses Elements in der Richtung der Coordinatenaxen die resp. Werte haben:

$$X = \frac{f(r)\cdot(x-x')}{r}\,dx\,dy\,dz; \quad Y = \frac{f(r)\,(y-y')}{r}\,dz\,dy\,dz;$$

$$Z = \frac{f(r)\cdot(z-z')}{r}\,dx\,dy\,dz;$$

um die Attraktions-Componenten in den Axenrichtungen für den ganzen Körper zu erhalten, wäre überall eine dreifache, über den ganzen Körper sich erstreckende Integration auszuführen. — Dieses Verfahren wurde bald allgemein von den Mathematikern adoptirt, so von Legendre, Laplace u. A. und bedarf hier wohl keiner weiteren Auseinandersetzung, da es sich in den Lehrbüchern vorfindet.[4]) Gleiches ist der Fall mit einem anderen, ebenfalls von Lagrange im Verlaufe derselben Untersuchung über Attraktion zuerst angewendeten Verfahren. Um nämlich die Behandlung von Attraktions-Problemen leichter zugänglich zu machen führte Lagrange die sogenannten, jetzt allgemein üblichen Polarcoordinaten ein und zeigte, wie Ausdrücke in rechtwinkligen Coordinaten sich in Polarcoordinaten transformiren lassen. Die grosse Tragweite eines solchen Processes erkannte bald Legendre,[5]) der zwar ebenfalls selbständig durch andere, „geometrische Betrachtungen“ zur Einführung der Polarcoordinaten gelangte, die Priorität hiefür jedoch Lagrange einräumte.

In der Abhandlung vom Jahre 1775 und in einer bald darauf folgenden (1777) bewies Lagrange fast all' die bis dahin bekannten Theoreme über Attraktion, besonders das Maclaurin'sche, auf dem von ihm betretenen analytischen Wege, ohne jedoch wesentlich neue Resultate zu erhalten; erst Laplace war es vorbehalten, durch fortgesetzte analytische Untersuchungen das vielumworbene Ellipsoidproblem (d. h. die Bestimmung der Attraktion eines Ellipsoids auf einen beliebig gelegenen Punkt), welches bisher allen Anstrengungen der Mathematiker spottete, zuerst (1785) vollständig zu lösen.[6])

Eine sehr eingehende, vortreffliche Geschichte der Attraktionstheorie und der daran sich knüpfenden Probleme besitzen wir in J. Todhunter: A history

of the mathematical theories of attraction and the figure of the earth, from the time of Newton to that of Laplace. 2 Vol. London 1873. Dieses Werk enthält eine historische Darstellung und kritische Würdigung beinahe aller bis etwa 1830 erschienener diesbezüglicher Arbeiten. Da sich im Verlaufe unserer Darstellung öfters die Gelegenheit bietet, auf dasselbe verweisen zu müssen, sei es dann abkürzend citirt mit: Todh. hist. attr.

Die Geschichte des Attraktions-Problems des Ellipsoids speciell ist in einer umfangreichen Abhandlung (Leidener Dissertation) bearbeitet von M. C. Paraira: Over de methoden ter bepaling van de aantrekking eener ellipsoide op en willekeurig punt. Academisch proefschrift. Amsterdam 1879. Diese Schrift enthält eine vergleichende Zusammenstellung der hauptsächlichsten Lösungsmethoden und eine zum grössten Teil wörtliche Uebersetzung der betreffenden Original-Abhandlungen von Newton, Maclaurin, d'Alembert, Lagrange, Legendre, Laplace, Ivory, Gauss, Poisson, Chasles und Dirichlet; zahlreiche, zum Teil weniger bekannte Arbeiten anderer Autoren über den gleichen Gegenstand, so die von Rodrigues, Plana, Liouville, Jacobi, Cayley, Schlömilch, Haedenkamp, Peslin, Despeyrous, Chelini, Mertens, Züge u. A. sind darin gänzlich unberücksichtigt geblieben. — Eine Darlegung der Forschungen d'Alemberts auf diesem Gebiete nebst kurzer Scizzirung der Methoden und Hauptresultate der Vorgänger desselben giebt F. Grube: „Zur Geschichte des Problems der Anziehung der Ellipsoide. Progr. Schleswig 1883."

[1]) Newton, Philos. nat. principia math. lib. I. sect. XII. XIII. S. Todh. hist. attr. Chapter I.; Paraira l. c. p. 5—11.

[2]) Maclaurin: A treatise of fluxions. 1742, art. 648 u. f. Vrgl. Grube: Zur Geschichte des Maclaurin'schen Satzes, in Schlömilch Z. XIV 261; Todh. hist. attr. art. 254 u. f.; Paraira p. 11—29.

[3]) Lagrange: Sur l'attraction des sphéroïdes elliptiques, in Nouveaux Mémoires de l'Académie de Sciences . . . de Berlin. Année 1773 publ. 1775, p. 121—148. — Ib. Année 1775, publ. 1777, p. 273—279. S. Todh. 707—716; Pareira p. 36—57.

[4]) Vrgl. Moigno: Mécanique analytique (1868), p. 453. — Schell: Theorie der Bewegung und der Kräfte (1870), p. 666. — Clausius: Potential etc., § 5. — Riemann: Schwere, Elektricität und Magnetismus. Bearbeitet von Hattendorf, 1876. § 1. — Lejeune-Dirichlet: Vorlesungen über die im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte. Herausgegeben von F. Grube, 1876. § 1. — Da die beiden letztgenannten Werke öfters zu citiren sind, seien sie abkürzend bezeichnet mit „Riem.-Hatt.", respective mit „Dirichlet-Grube".

[5]) Le Gendre: Mémoire sur les intégrales doubles . . . in Mémoires de l'Académie. Paris. Année 1788, publ. 1791, p. 455: „Ce principe auquel j'étais parvenu par des considérations géométriques ne s'est point trouvé différent d'un moyen de transformation indiqué par M. de La Grange . . . La propriété en appartient donc à cet illustre géomètre." S. Todh. hist. attr. 877 und 878; Paraira p. 36.

[6]) Laplace: Théorie des attractions des sphéoroïdes et de la figure des planètes. Mém. de l'Acad. de Paris 1782, publ. 1785, p. 113—196; zum grössten Teil reproducirt in Mécanique céleste liv. III. Die Lösung durch ein bestimmtes Integral für einen inneren Punkt findet sich bei Laplace: Théorie du mouvement et de la figure elliptique des planetes. 1784. p. 86—97. — Für das Rotations-Ellipsoid wurde das Problem schon vorher allgemein gelöst durch Legendre: Recherches sur l'attraction des sphéroïdes homogènes. Mémoires présentés par divers savans. Paris 1785. p. 411—434. — Vrgl. Todh. hist. attr. Chapter XX. u. art. 805. — Paraira l. c. p. 57—96, besonders S. 81 u. 96.

§ 2.

Die Potential-Function.

Lagrange machte (1777) die Bemerkung,[1]) dass die Attraktions-Componenten nach den Axen (obige X, Y, Z) sich als die partiellen Abgeleiteten einer einzigen Funktion Ω der Variablen x, y, z (Coordinaten des angezogenen Punktes) ausdrücken lassen, und zeigte, dass dieses Ω nichts Anderes ist, als die Summe aller wirkenden Massenteilchen, jedes multiplicirt mit einer Funktion seiner Entfernung vom angezogenen Punkte; bei Zugrundelegung des Newton'schen Gesetzes ist diese Funktion die reciproke Entfernung beider.

Laplace und Legendre scheinen keine Kenntniss gehabt zu haben von der diesbezüglichen Lagrange'schen Abhandlung. Legendre bemerkt ausdrücklich, dass ihm dieses „Theorem" von Laplace mitgeteilt worden sei, letzterer selbst erwähnt nirgends die Priorität Lagrange's hiefür, und so mag es gekommen sein, dass die Einführung einer solchen Funktion Ω von manchen Autoren Laplace zugeschrieben wurde, der sie in seiner „Mécanique céleste" allgemeiner bekannt machte und ihre Wichtigkeit für die Attraktions-Theorie darthat.[2])

Dieser Funktion der Coordinaten des afficirten Punktes, für welche Laplace die jetzt allgemein übliche Bezeichnung: V gebrauchte, wurde ein besonderer Name beigelegt und zwar von Green: „Potential-Funktion", von Gauss: „Potential".[3]) Letztere sowohl als auch Laplace wollten unter dieser Funktion V nichts anderes verstanden wissen, als das Aggregat aller wirkenden Massenteilchen, jedes dividirt durch seine Entfernung vom afficirten Punkte. „Doch," bemerkt Gauss (A. L. 3), „könnte man im weiteren Sinne sowohl für Betrachtung anderer Anziehungsgesetze, als im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung, als auch für den vierten, im Art. 1 erwähnten Fall" (für Kräfte elektrodynamischen Ursprungs), „unter Potential die Funktion von x, y, z verstehen, deren partielle Differentialquotienten die Componenten der erzeugten Kraft vorstellen." In letzterem Sinne wird in der Physik jetzt häufig das Wort „Potential" gebraucht, man spricht dann von Kräften, welche ein Potential besitzen; auch eine rein physikalische Bedeutung wird diesem Ausdrucke beigelegt, wovon später die Rede ist (§ 11).

Clausius[4]) unterscheidet zwischen Potentialfunktion und Potential; indem er ersterer Bezeichnung die ursprüngliche Definition beilegt, will er unter Potential, oder ausführlicher unter Potential eines Systems in Bezug auf ein anderes oder auf sich selbst, verstanden wissen: Die Summe der Potentialfunctionen eines Massensystems in Bezug auf jedes einzelne Element eines andern oder desselben Systems; das Nämliche, was Lagrange mit der Funktion Ω bezeichnen wollte. Doch wird diese Unterscheidung von nur wenigen Autoren strenge

durchgeführt; der Gebrauch beider Ausdrücke tritt uns überdies in der Litteratur bei den mannigfachen Anwendungen in so verschiedenen Interpretationen entgegen, dass es gerathen sein dürfte, vorerst an der von Laplace, Green und Gauss gegebenen Definition festzuhalten; die hievon abweichenden werden sich im Laufe der geschichtlichen Darstellung dann von selbst ergeben.

---

[1]) Lagrange: „Remarques générales sur le mouvement de plusieurs corps qui s'attirent mutuellement en raison inverse des carrés des distances." (Lu le 2 Octobre 1777). Nouveaux Mém. de l'Acad. de Berlin. Année 1777; pbl. 1779. p. 155—174. Die betreffenden Stellen lauten: Soient M, M', M'' . . . les masses des corps qui composent le système donné; x, y, z les coord. rect. de l'orbite du corps M dans l'espace; x', y', z' celles de l'orbite du corps M' etc.; qu'on fasse pour abrèger

$$\Omega = \frac{MM'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} + \frac{MM''}{\sqrt{(x-x'')^2+(y-y'')^2+(z-z'')^2}} + \frac{M'M''}{\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2}} + \ldots$$

et qu'on denote, à l'ordinaire, par $\frac{d\Omega}{dx}$, . . . les coëfficiens de dx, . . . dans la différentielle de la quantité Ω regardée comme fonction des variables x, y, z, x' . . . on aura

$$\frac{1}{M}\frac{d\Omega}{dx}, \quad \frac{1}{M}\frac{d\Omega}{dy}, \quad \frac{1}{M}\frac{d\Omega}{dz}$$

pour les forces avec lesquelles le corps M est attiré par les autres corps M', M'', etc., suivant les directions des trois coordonnées x, y, z . . . Cette manière de représenter les forces est, comme l'on voit, extrémement commode par sa simplicité et par sa généralité." Am Schlusse p. 171: „On prouverait par les mêmes principes, que ces théorèms seraient également vrais si les corps agissaient les uns sur les autres par une force d'attraction mutuelle proportionelle à une fonction quelconque de la distance."

[2]) Legendre, in der in § 1 Anm. 6 citirten Abhandlung sagt in Bezug auf das Potential: „ . . . un théorême que M. de La Place a bien voulu me communiquer." Bei Laplace tritt die Funktion zuerst auf in: Théorie du mouvement . . . des planetes 1784, p. 69—73, aufgenommen in Mec. cél. liv. II, § 7 und 11. — Vergl. Todh. hist. attr. 789, 790. 802, 895. — Heine, Handbuch der Kugelfunktionen. 2. Aufl. I. (1878), S. 2 und Berichtigung hiezu Bd. II (1881), S. 342. — Von Autoren, welche die Einführung von V Laplace zuschreiben, seien ausser den beiden Letzteren noch namentlich angeführt: Thomson and Tait: Natural philosophy. (Deutsch von Helmholtz und Wertheim unter dem Titel: „Handbuch der theoretischen Physik," 1871 u. 74) Art. 482. — Maxwell: Treatise on electricity and magnetism. (Second Edition). 1881. Art. 16.

Balzer: Zur Geschichte des Potentials. Borch. J. f. Math., Bd. 86 (1878), S. 213—216 macht auf die Priorität Lagrange's aufmerksam und fügt nach Darlegung des Sachverhalts hinzu: „Lagrange's Priorität ist, wie es scheint, weder damals, noch in unserer Zeit erwähnt worden." Dies ist jedoch nicht richtig, da verschiedene Schriftsteller Lagrange ausdrücklich die Einführung des Potentials zuschreiben, jedoch ohne Angabe der Quelle. So z. B. Biot in

Mém. de l'Inst. VI, Paris 1806, p. 208: „M. Lagrange a démontré que les coëfficiens differentiels $\frac{dV}{da'}$, $\frac{dV}{db'}$, $\frac{dV}{dc'}$, expriment les attractions exercées ... parallelement aux trois axes rectangulaires" und dieselben Worte in: Nouv. Bull. par la societé philomatique de Paris. III. (1812) p. 44. (Todh. hist. att. 1138 wundert sich über diesen Ausspruch Biot's, da ihm die Lagrange'sche Abhandlung entgangen ist.) Ferner Ostrogradsky, Mém. de l'Acad. de St. Petersbourg. I. 1831 p. 54: „... Cette remarque est due à Lagrange." — Chasles, Conn. des Tems pour 1845 p. 19: „Les coëff. diff. expriment précisément les composantes. . . Cette remarque avait été faite par Lagrange." — Despeyrous, Crelle J. Bd. 31 (1846) S. 136: „Lagrange, le premier, a introduit dans le calcul de l'attraction des corps une certaine fonction des coord. rect. x, y, z du point attiré, dont les coëfficients differentielles du premier ordre pris successivement par rapport à x, y, z expriment les composantes etc." — Riem-Hatt. (1876) S. 7: „Lagrange hat bemerkt u. s. w.

[3]) G. Green: Essay on the application of mathematical analysis on the theories of Electricity and Magnetism. 1828. (Für die Folge citirt mit Green: Essay) p. 9 der Edition Ferrers: „We shall often have occasion to speak of this function, and will therefor, for abridgement, call it the potential function" und p. 22: „As this function . . . will recur very frequently in what follows, we have ventured to call it the potential function belonging to the system, and it will evidently be a function of the coordinates of the particle p under consideration. — Gauss: Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungs-Kräfte. 1840. (Citirt mit Gauss A. L.) Art. 3: „Zur bequemeren Handhabung . . . werden wir uns erlauben, dieses V mit einer besonderen Benennung zu belegen, und diese Grösse das Potential der Massen, worauf sie sich bezieht, nennen."

Über Ableitung und Beweis des in Rede stehenden Theorems vergl. man die Lehrbücher: Gauss A. L. 2. — Clausius, Die Potentialfunktion § 1—9. — Dirichlet-Grube § 2. — Riem-Hatt. § 2. — Betti: Teorica delle Forze Newtoniane etc. (1879) I § 1. — Moigno Méc. anal. p. 453. — Resal: Mécanique céleste p. 123. — Ganz besonders s. Heine: Kugelfunktionen II. § 17. S. 31—42, der näher auf die Zulässigkeit und Bedeutung des hiebei auftretenden dreifachen Integrals eingeht. — Ferner Boussinesq: Sur la manière de présenter la théorie du potentiels d'attractions, dans l'hypotèse, généralement admise, de la discontinuité de la matière. Lionville Journ. de Math. (3e serie) VI. 1880. p. 89—98.

[4]) Clausius: Abhandlungen zur mechanischen Wärmetheorie II. S. 102; Derselbe: Die Potentialfunktion und das Potential. 3te Aufl. 1877. § 9 und § 63, 64. — Diese Unterscheidung wurde adoptirt von Betti: Teorica etc. Cap. I, § XX (S. 125: Das Potential geht über in die Potentialfunktion, wenn das eine System nur aus der Masseneinheit besteht). — Kötteritzsch: Lehrbuch der Elektrostatik (1872) S. 5. — Die von Thomson und Tait art. 485 Gauss zugeschriebene Unterscheidung wurde von Letzterem nicht gemacht, und scheint eine Verwechslung mit Clausius vorzuliegen.

§ 3.

Die Laplace-Poisson'sche partielle Differentialgleichung.

Eine weitere Eigenschaft von V, „welche die Grundlage aller Untersuchungen über das Potential bildet," (Dirichlet.) wurde von Laplace entdeckt, nämlich, dass zwischen den Derivirten der Com-

ponenten X, Y, Z, oder den zweiten Abgeleiteten von V nach x, y, z die Relation stattfindet:

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Diese Gleichung heisst nach ihrem Entdecker die Laplace'sche partielle Differentialgleichung, auch kurzweg: die Laplace'sche Gleichung. Laplace erhielt sie [1]) (1789) in der angeführten Form durch Differentiation des dreifachen Integrals $\left(V = \int\int\int \frac{\varrho \, dx' \, dy' \, dz'}{r} \right)$ unter dem Integralzeichen und Addition der erhaltenen Ausdrücke, ohne näher auf die Berechtigung dieser Operationen einzugehen, die in der That nicht immer zulässig sind, wie später von Anderen nachgewiesen wurde. Merkwürdiger Weise erscheint die Gleichung zuerst (1785) bei Laplace [2]) nicht in obiger Form, sondern in der Form für Polarcoordinaten, als welche sie die Grundlage für die Theorie der Kugelfunktionen bildete. Erst später (1789) stellte Laplace die Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten auf, transformirte sie dann durch die gewöhnliche, langwierige Substitutionsmethode in Polarcoordinaten (Méc. cél. liv. II, § 11), in welcher Gestalt er sie zur Entwicklung der Theorie der Kugelfunktionen und mit dieser zur Bestimmung der Attraktion der Kugel, der Kugelschale und des Sphäroids benützte (ib. liv. III).

Die Wichtigkeit der Laplace'schen Gleichung für die Bestimmung von Funktionen, welche gewissen Bedingungen genügen sollen, trat dabei schon ziemlich deutlich hervor; sie erlangte später eine erhöhtere Bedeutung in manchen Gebieten der Mathematik und der mathematischen Physik und man bedient sich für sie, ihres häufigen Vorkommens halber, einer abgekürzten Bezeichnungsweise. Das von Murphy zuerst angewendete Symbol: ΔV zur Bezeichnung der Summe der zweiten partiellen Abgeleiteten einer Funktion V der Variabeln x, y, z nach diesen ist fast allgemein adoptirt. Lamé nennt diese Summe den Differential-Parameten zweiter Ordnung und bezeichnet sie mit $\Delta_2 V$; auch die Zeichen: $\Delta^2 V$, ∇V, $\nabla^2 V$ werden häufig dafür gebraucht, Green bediente sich für sie der Bezeichnung δV.[3])

Poisson [4]) bemerkte zuerst (1813), dass wenn man nach Laplace's Vorgang die Summe der zweiten partiellen Abgeleiteten von V bildet in Bezug auf einen in der wirkenden Masse liegenden Punkt, die Summe der Zähler zwar verschwindet, jedoch auch der Nenner zu Null, ΔV also unbestimmt wird. Er zeigte, dass in diesem Falle die Gleichung $\Delta V = 0$ nicht mehr giltig ist, an ihre Stelle vielmehr die Gleichung $\Delta V = -4\pi\varrho$ zu treten hat, wenn ϱ die Dichtigkeit der Masse in dem angezogenen Punkte bezeichnet. Diese allgemeinere Gleichung, welche die erstere mit umfasst, da in einem ausserhalb der wirkenden Masse befindlichen Punkte die Dichtigkeit $\varrho = 0$ ist, heisst die Laplace-Poisson'sche Gleichung.

Poisson selbst gab für sein Theorem drei Beweise, die sich wesentlich von einander unterscheiden. Das erste Poisson'sche Beweisverfahren (1813) besteht der Hauptsache nach darin, dass man sich den angezogenen Punkt durch eine ihn umschliessende Kugelfläche von der übrigen Masse des Körpers getrennt denkt, dadurch zerfüllt das Potential V im betrachteten Punkte in zwei Potentiale $V = U + U'$, von welchen ersteres von derjenigen Masse herrührt, welche die Kugelfläche einschliesst, letzteres von dem übrigen Teile des Körpers. Nun ist $\Delta V = \Delta U + \Delta U'$; aber $\Delta U' = 0$ (die Laplace'sche richtige Gleichung für einen der Masse nicht angehörigen Punkt), daher $\Delta V = \Delta U$. Für einen innerhalb der Kugel befindlichen Punkt ergiebt sich aus dem direkt berechneten Werthe für U der Werth von $\Delta U = -4\pi\varrho$ und folglich allgemein $\Delta V = -4\pi\varrho$. Ist die Masse des Körpers nicht homogen, so kann man, sagt Poisson, den Radius der Hülfskugel so klein wählen, dass die in die Kugelfläche hineinfallende Masse als homogen angesehen werden kann. — Dieser Poisson'sche Beweis, der an Strenge manches zu wünschen übrig lässt, findet sich auch bei Green und Pagani und ist in mehrere Lehrbücher übergegangen.[5])

Das zweite Poisson'sche Beweisverfahren[6]) (1826) besteht in der Anwendung von Methoden (und damit erhaltenen Sätzen), welche Gauss (1813) zuerst in die Mathematik einführte.[7]) Mit Hilfe parallelen Projicirens der Begrenzung eines Körpers auf die drei rechtwinklig sich schneidenden Coordinaten-Ebenen leitete nämlich Gauss Beziehungen ab zwischen einem Körper-Integral und dem Integral, das sich über die Oberfläche desselben Körpers erstreckt; diese Beziehungen und ihre Anwendung auf die Theorie der Attraktion bilden den Inhalt der ersten drei Theoreme von Gauss: Theoria attractionis etc. Durch centrales Projiciren der Oberfläche eines beliebig gestalteten Körpers von einem Punkte aus auf die Oberfläche einer aus diesem Punkte als Centrum beschriebenen Kugel, deckte Gauss noch weitere solche Relationen auf (Theorem 4, 5 und 6). Ganz besonders hervorgehoben sei das vierte Theorem, da es bei manchen Beweisen und Betrachtungen in der Potentialtheorie eine hervorragende Rolle spielt. Bezeichnet nämlich M das Projections-Centrum, ds ein Element der Oberfläche des gegebenen Körpers, r die Entfernung zwischen M und ds, $\widehat{MQ}$ den Winkel, welchen die Normale Q in ds mit dem von M ausgehenden Strahl bildet, so sagt das vierte Gauss'sche Theorem aus: Das Integral $\int \frac{ds \cos \widehat{MQ}}{r}$, über die ganze Oberfläche erstreckt, ist entweder Null, oder $= -2\pi$ oder $= -4\pi$, je nachdem M ausserhalb, in der Begrenzung oder im Innern des Körpers liegt.

Poisson stützt nun seinen zweiten Beweis der Gleichung $\Delta V = -4\pi\varrho$ auf diese Sätze von Gauss, welche er in gleicher Art wie

dieser beweist. Er erwähnt aber dabei Gauss nicht, obwohl er dessen Abhandlung: Theoria attractionis etc. gekannt haben muss, denn es ist doch schwerlich anzunehmen, dass er, der sich so eingehend mit dem Attraktions-Problem des Ellipsoids beschäftigte, wie seine darüber veröffentlichten Arbeiten zeigen, von der den gleichen Gegenstand behandelnden, bald berühmt gewordenen Gauss'schen Schrift nach 13 Jahren keine Kenntniss gehabt hätte. — In seinem Beweisgange verfiel übrigens Poisson in einen Fehler, von dem später die Rede ist.

Der dritte von Poisson[8]) gegebene Beweis (1826) stützt sich auf die Theorie der Kugelfunktionen. Einen anderen Beweis für $\Delta V = -4\pi\varrho$ gab Rodrigues[9]) durch Transformation von X, Y, Z auf Polarcoordinaten und Einführung gewisser, von den Grenzen der Integrale abhängender Funktionen.

Für die Folge bildete der strenge Nachweis der Relation $\Delta V = -4\pi\varrho$ eine der Hauptaufgaben der Potentialtheorie; derselbe wurde von verschiedenen Autoren auf so verschiedenen Wegen zu führen versucht, dass es nicht gut angeht, in einer kurzen historischen Skizze all' die diversen Methoden zu charakterisiren. Zuerst wären zu erwähnen die Beweise von Ostrogradsky, Sturm und Pagani,[10]) welche sich an die erste oder zweite Poisson'sche Methode anlehnen und nicht als durchaus korrekt und strenge gelten können (s. weiter unten). Den ersten streng mathematischen Beweis gab Gauss 1840 (A. L. 9, 10, 11), von welchem er selbst sagt, dass es ihm die befriedigendste Art scheine, diesen wichtigen Lehrsatz zu begründen. Durch geometrische Betrachtungen leitete Gauss zuerst einen Ausdruck ab für $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ oder $\frac{dX}{dx}$, nämlich $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{dX}{dx} = \int \frac{(a-x)}{r^3} \frac{d\varrho}{da} \cdot dt - \int \frac{\varrho\,(a-x)\cos\alpha}{r^3}\, ds$ (und ähnliche für $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ und $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$), worin a, b, c die Coordinaten des Körperelements dt sind; das erste Integral erstreckt sich über die ganze anziehende Masse, das zweite über die Oberfläche derselben, α, β, γ sind die Winkel, welche die in dem Flächenelement ds nach Aussen errichtete Normale mit den Coordinatenaxen bildet. Die Addition der drei Gleichungen giebt $\Delta V = \int \frac{d\varrho}{dr} \frac{dt}{r^2} - \int \frac{\varrho \cos\delta}{r^2} ds = M - N$ (δ ist der Winkel, welchen der Radiusvector r mit der Normale zur Oberfläche in ds bildet). Das dreifache Integral M verwandelte hierauf Gauss in ein doppeltes und zwar durch das gleiche Verfahren, womit er das oben angeführte vierte Theorem der Theoria attractionis ableitete; es zeigt sich dabei, dass für einen in der wirkenden Masse liegenden Punkt $M = -4\pi\varrho + N$, für einen ausserhalb derselben liegenden Punkt aber $M = N$ ist; daher ist im ersten Falle $\Delta V = -4\pi\varrho$, im zweiten dagegen $\Delta V = 0$.

Nicht wesentlich, sondern nur in einzelnen Punkten hievon verschieden, ist der von Dirichlet[11]) eingeschlagene Beweisgang. Dirichlet leitet auf dem von Gauss in Theoria attr. zuerst gezeigten geometrischen Wege die Relation ab:

$$X = \int \frac{d\varrho}{da} \cdot \frac{1}{r} \cdot dt - \int \frac{\varrho \cos \alpha}{r} ds,$$

beweist durch Grenzbetrachtungen ihre Giltigkeit auch für Punkte, welche der Masse angehören, zeigt hierauf die Zulässigkeit der Differentiation dieses Ausdrucks unter dem Integralzeichen nach x, und kommt schliesslich mit Hilfe der durchgeführten Rechnung für die Kugel zu dem Resultate: $\Delta V = -4\pi\varrho$.

Gauss sowohl wie Dirichlet stellten bei diesen Beweisen die Forderung auf, „dass die Dichtigkeit (ϱ) in dem betrachteten Punkt nach allen Seiten zu sich nach der Stetigkeit ändere, oder dass dieser Punkt innerhalb eines wenn auch noch so kleinen, dieser Bedingung Genüge leistenden Raumes liege." (Gauss A. L. 11.) Ist dagegen diese Bedingung nicht erfüllt, wie z. B. an der Oberfläche eines Körpers, so ist wegen der hiebei eintretenden Unstetigkeit von $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ u. s. w. die ganze Betrachtungsweise nicht mehr zulässig, und gerade in der Nichtberücksichtigung dieses Umstandes liegt hauptsächlich das Fehlerhafte einiger früheren Beweise. Gauss zeigt (A. L. 8) an dem Beispiele der Kugel, dass die zweiten partiellen Derivirten von V beim Übergange aus dem äusseren in den inneren Raum sich sprungweise ändern und in der Scheidungsfläche selbst man ihnen doppelte Werthe beizulegen habe. „Auf der Oberfläche selbst verliert das Aggregat $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ seine einfache Bedeutung: präcis zu reden, kann man nur sagen, dass es ein Aggregat von drei Teilen ist, deren jeder zwei verschiedene Werthe hat, und so giebt es eigentlich acht Combinationen, unter denen eine mit dem auf der innern Seite, eine andere mit dem auf der äussern Seite geltenden Werthe übereinstimmt, während die 6 übrigen ohne alle Bedeutung bleiben." (S. auch Schlussbemerkung des Art. 11 der A. L.) Gauss fährt dann fort: „Der Analyse, durch welche einige Geometer auf der Oberfläche der Kugel den Werth $-2\pi\varrho$, oder den Mittelwerth zwischen den innen und aussen geltenden, herausgebracht haben, kann ich, insofern der Begriff von Differentialquotienten in seiner mathematischen Reinheit aufgefasst wird, eine Zulässigkeit nicht einräumen." Dieses richtet sich gegen Poisson (zweiter Beweis), Ostrogradsky und Pagani, welche für einen der Oberfläche angehörigen Punkt die Relation aufstellen: $\Delta V = -2\pi\varrho$. Poisson verfiel in einen Fehler dadurch, dass er das Gauss'sche vierte Theorem (oben S. 8) allgemein anwenden zu können glaubte, ohne auf den Zusammenhang von V mit seinen Derivirten und auf

deren Stetigkeit weiter zu achten. Einen ähnlichen Fehler beging Ostrogradsky, auf den Pagani[12]) aufmerksam machte; Letzterer dagegen achtete bei seiner Deduction nicht genau auf die Bildung des Differentialquotienten. — Die von Ostrogratsky und Pagani gegebene Verbesserungen der Poisson'schen Gleichung $\Delta V = -2\pi\varrho$ sind insofern noch von Interesse, als sie bereits die Modification des mehrfach genannten Gauss'schen Theorems, für den Fall des Vorhandenseins von Kanten und Ecken, enthalten, die Gauss selbst später (A. L. 22) angebracht hat.

Der kurze und strenge Riemann'sche[13]) Beweis für $\Delta V = -4\pi\varrho$ nimmt ebenfalls das Gauss'sche vierte Theorem zum Ausgangspunkt und wendet es auf ein der Masse angehöriges Parallelepipedon an.

Einen sehr eingehenden, die verschiedenen Fälle umfassenden Beweis gab Clausius[14]) „durch eine (ziemlich grosse) Reihe einfacher und nur auf den Grundprinzipien der Differential- und Integralrechnung beruhender mathematischer Operationen."

Die von Gauss erhobenen Einwände gegen die Zulässigkeit der Summirung der zweiten partiellen Abgeleiteten des Potentials für Punkte der Oberfläche treffen wohl ebenfalls die anscheinend so eleganten und kurzen Beweise für $\Delta V = -4\pi\varrho$ von Kirchhoff und Betti,[15]) die sich auf eine charakteristische Eigenschaft des Flächenpotentials stützen; es lässt sich durch ein solches Verfahren wohl die Verschiedenheit von ΔV für äussere und innere Punkte erklären, aber doch nicht strenge die Richtigkeit der Formel erweisen.

Zu erwähnen sind noch der Beweis von Weingarten[16]) mit Hilfe der Fourier'schen Integrale, der auf sehr allgemeiner Grundlage beruhende Kronecker'sche Beweis[17]), der Gauss' nachgebildete, aber weniger klare Beweis von Boussinesq, sowie diejenigen von Grünwald und Delsaux.[18])

Das in diesem § behandelte Theorem wurde in neuerer Zeit in seiner ganzen Vollständigkeit von Somoff[19]) in folgender Form ausgesprochen: Es gilt allgemein die Gleichung $\Delta V = -4\pi\varepsilon\varrho$, wo im Falle eines äussern Punktes $\varepsilon = 0$, im Falle eines innern Punktes $\varepsilon = 1$ und im Falle eines Punktes auf der Oberfläche der Masse $0 < \varepsilon < 1$ zu setzen ist. Namentlich mit Rücksicht auf den letzteren Fall sind die zwei von einander verschiedenen von Somoff gegebenen Beweise sehr beachtenswerth.

---

[1]) Laplace: Mémoire sur la théorie de l'anneau de Saturne. Mém. de l'Acad. Année 1787. Paris 1789. p. 249—267. — S. Todh: hist. attr. 866.

[2]) Laplace: Théorie des attractions des spheroïdes et de la figure des planétes. Mém. de l'Acad. de Paris. Année 1782. (publ. 1785). — S. Todh: hist. attr. 851.

[3]) Murphy: Elementary principles of the theories of electricity, heat and molecular actions. Part. 1. 1833. p. 140: „denoting by $\triangle$ the operation . . ."

— Lamé: Leçons sur les coordonnées curvilignes etc. Paris 1859 p. 6. — Somoff: Theoretische Mechanik. II. S. 118. — Betti gebraucht das Vorzeichen Δ^2. Der Symbole ∇, ∇^2 bedienen sich meistens die englischen Schriftsteller, so Todhunter, Thomson und Tait, Maxwell; letzterer nennt ∇^2 „Laplaces Operator“ (Electricity etc. art. 26) und bezeichnet mit ∇ eine hiervon verschiedene Operation. — Green: Essay etc. p. 20: „we shall write it (the equation) in the abridged form $0 = \delta V$.“

[4]) Poisson: Rémarques sur une équation qui se présente dans la théorie des attraction des sphéroïdes. Nouveau Bulletin de la société philomatique de Paris. Vol. III. 1813. p. 388—392.

[5]) Green: Essay. art. 1. — Pagani in Crelle J. Bd. XII. S. 324. — Clausius: Potentialf. § 17. — Schell: Theorie der Bew. und der Kräfte. S. 690. — Moigno: Mec. analyt. p. 456—460. — Resal: Mec. cél. p. 156. — Thomson and Tait: Nat. phil. 491 c.

[6]) Poisson: Mémoire sur la théorie du magnetisme en mouvement. Mém. de l'Acad. de Paris. Vol. VI. Année 1823. Paris 1827. p. 455—463. — S. Todh. hist. attr. 1241—1246.

[7]) Gauss: Theoria attractionis corporum spheroïdicorum ellipticorum homogeneorum methodo nova tractata. Comment. Soc. reg. sc. Gottingensis. Vol. II. 1813. Abgedruckt in Gauss' Werke, Bd. V. S. 2—22. Eine Anzeige davon von Gauss selbst erschien in den Gött. gel. Anzeigen, 5. April 1813. Werke Bd. V. S. 279—286. — S. Todh. hist. attr. 1162—1175. — Paraira: Over de methoden etc. S. 141—150 giebt eine fast wörtliche Übersetzung der ganzen Abhandlnng.

[8]) Poisson: Mémoire sur l'attraction des spheroïdes. Conn. des Tems pour 1829. Paris 1826. p. 354—364. Vergl. die Wiedergabe bei Todh. hist. attr. 1362—1366.

[9]) Rodrigues: Mémoire sur l'attraction des spheroïdes. Correspondance sur l'Éc. polyt. III. 1816. p. 361—385. S. den Beweis bei Todh. 1240.

[10]) Ostrogradsky: Note sur une intégral qui se rencontre dans le calcul de l'attraction des sphéroïdes. Mém. de l'Acad. de St. Petersbourg. 6. serie. Vol. I. 1831. p. 39—53. — S. (Sturm) in Ferrusac's Bulletin . . . des sciences math. XIV. 1830. p. 81—88. Vergl. Todh. hist. attr. 1247—1251. — Pagani: Note sur l'attraction des spheroïdes. Crelle J. XII. 1834. S. 342—345. Diese Arbeit scheint Todhunter entgangen zu sein.

[11]) Dirichlet-Grube: Vorlesungen etc. § 6. S. 18—28. — Schell: Theorie der Bew. und der Kräfte (1870) giebt S. 679—684 einen Beweis, von welchem er sagt (S. 690), dass er bis auf kleine formelle Verschiedenheiten von Gauss herrührt; in Wirklichkeit ist es aber nicht der Gauss'sche, sondern der Dirichlet'sche Beweis. Man vergleiche nur die Methoden beider in ihren ersten Hälften, durch welche sie sich besonders von einander unterscheiden. — Den Gauss'schen Beweis reproducirt Moigno: Méc. analyt. p. 555—561 fast wörtlich.

[12]) In der Anm. 10 dieses § citirten Note . . . „il ne resulte pas nécessairement de la demonstration de Poisson que l'on doive avoir toujours $X_1 = \frac{dX}{dx} = \frac{d^2U}{dx^2}$ etc. D'un autre coté, M. Ostrogradsky démontre, en suivant une methode différente, qué l'on doit avoir, selon le cas $\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 0, -2\pi\rho, -4\pi\rho$; mais il ne fait pas voir quelle est la relation entre les quantités X etc. et l'integrale V.“

[13]) S. Kötteritzsch: Elektrostatik. 1872. S. 10—15. — Riemann-Hatt.: Schwere u. s. w. 1876. § 11—13.

[14]) Clausius: Sur la démonstration de l'équation $\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}=-4\pi\varepsilon K p$. Liouville J. (2) III. 1858 p. 57—62. Aufgenommen und erweitert in Clausius: Die Potentialfunktion und das Potential, (3. Aufl.) § 18—26, und in gedrängterer Form in Briot: Die mechanische Wärmetheorie. Deutsch von H. Weber. 1871. S. 213—218. — Einen anderen Beweis (nur für homogene Körper) gab Clausius in der 1. Auflage von: Die Potentialf. etc.; s. Anhang zur 3. Aufl. S. 166—169. — Über die von Clausius angewendete Methode handelt Beltrami: Intorno ad alcune propositioni di Clausius nella teoria del potenziale. Rendic. del Jst. Lomb. XI. 1878 p. 13—27.

[15]) Kirchhoff: Vorlesungen über mathmatische Physik. 1877. S. 179. — Betti: Teorica delle forze Nowtoniane etc. § IX p. 31—34.

[16]) Weingarten: Zur Theorie des Potentials. Crelle J. Bd. 49 (1855). S. 367—369.

[17]) Kronecker: Zur Potentialtheorie. Borch. J. Bd. 70 (1869). S. 246—248.

[18]) Boussinesq: Sur une manière simple de présenter la théorie du potentiel etc. C. R. t. 88. (1879) p. 277—280. — Grünwald: Zur Theorie des Potentials. Schlöm. Z. XIV (1869) S. 521—524. (Vrgl. das Referat in Jahrb. für die Fortschritte der Math. Bd. II.) — Delsaux: Sur la démonstration de l'équation $\Delta V=-4\pi\rho$. Société scient. de Bruxelles. II. b. 1873 p. 99—102.

[19]) Somoff: Theoretische Mechanik. Aus dem Russischen übersetzt von Ziwet. II. Theil. 1879. S. 141 und 230 Anm.

§ 4.

Die charakteristischen Eigenschaften des Körper-Potentials. Ausnahme-Stellen.

Ein weiterer Schritt zur Potentialtheorie, zu welchem das verschiedene Verhalten von ΔV hauptsächlich Veranlassung gab, wurde gethan durch die genauere Untersuchung des Verlaufs der Potentialfunktion und ihrer Derivirten im ganzen Raum, sowie dann durch das Aufsuchen der Bedingungen, die erfüllt sein müssen, wenn eine oder mehrere dieser Funktionen bei Annäherung von Ausnahmestellen, das sind: Punkte, Linien und Flächen, in welchen die Dichtigkeit discontinuirlich oder unendlich wird, ihren wesentlichen Charakter der Endlichkeit, Stetigkeit und Eindeutigkeit behalten sollen. Diese Untersuchungen wurden namentlich geführt von Gauss, Dirichlet, Lipschitz und Christoffel.

Gauss zeigte (A. L. 5 u. 6) durch Transformation auf Polar-Coordinaten nach dem vorgängigen Verfahren von Laplace und Poisson, dass sowohl V als seine ersten Abgeleiteten im ganzen unendlichen Raume bestimmte endliche Werthe besitzen, die sich nach der Stetigkeit ändern. Dirichlet und Heine,[1]) letzterer besonders eingehend, gaben Beweise für die Richtigkeit dieses Satzes durch specielle Discussion der die Funktionen V, $\frac{dV}{dx}$ u. s. w. darstellenden Integrale.

Die zweiten Differentialquotienten von V betreffend, zeigte Gauss (A. L. 5. 7. 8), dass sie im ganzen äusseren und im ganzen inneren

(von der Masse erfüllten) Raume sich stetig ändern, beim Übergange aus dem einen in den anderen Raum aber Discontinuität eintritt. Sie genügen (s. § 3) ferner der Gleichung $\Delta V = 0$, resp. $\Delta V = -4\pi\varrho$.

Eine weitere Eigenschaft, die schon bei Gauss (A. L. 21) angedeutet ist, stellte Dirichlet[2]) auf. Gestützt auf einen allgemeinen Satz der Mechanik zeigte nämlich Dirichlet, dass V gegen die Grenze: Null convergirt, wenn die Entfernung des afficirten Punktes von der wirkenden Masse immer mehr wächst. Durch nähere Specialisirung dieser Eigenschaft ergiebt sich dann weiter, dass die Grössen: xV, yV, zV, $x^2\frac{\partial V}{\partial x}$, $y^2\frac{\partial V}{\partial y}$, $z^2\frac{\partial V}{\partial z}$ im ganzen Raume endliche Werthe besitzen.

Nun machte Dirichlet[3]) (1846) die wichtige Bemerkung, dass die angeführten drei Haupteigenschaften die Potentialfunktion V vollständig charakterisiren, dass es keine andere Funktion V' geben kann, welche diese Eigenschaften mit V zugleich besitzt, ohne mit dieser identisch zu sein. Den ziemlich kurzen ursprünglichen Beweis des Theorems durch Ausführung partieller Integrationen erweiterte Dirichlet später in seinen Vorlesungen, indem er den Green'schen Satz (s. unten § 7) zum Ausgangspunkte der betreffenden Deduktionen nahm.

Die Wichtigkeit des Dirichlet'schen Theorems besteht hauptsächlich darin, dass es Kriterien an die Hand giebt (daher Dirichlet'sche Kriterien), einen irgendwie erhaltenen Ausdruck darauf hin zu untersuchen, ob er das Potential eines gegebenen Massensystems sein kann, um ihn dann als das wirkliche Potential dieses Systems zu charakterisiren. Dirichlet selbst[4]) machte eine sehr bemerkenswerthe Anwendung seiner Kriterien auf den von ihm zuerst durch eine neue, eigenartige Methode (Einführung eines discontinuirlichen Faktores) hergestellten Ausdruck für das Potential eines homogenen Ellipsoids, mit welchem er, nebenbei bemerkt, das berühmte Ellipsoidproblem ein gutes Stück weiter gefördert und zum vorläufigen Abschluss gebracht hat. Auch von Anderen wurden die Dirichlet'schen Kriterien häufig und auf verschiedenartige Fälle angewendet, wovon später die Rede sein wird.

Von Lipschitz[5]) (1863) und in einer umfassenden, wichtigen Abhandlung von Christoffel[6]) (1865) wurden die Untersuchungen über den Verlauf der Potentialfunktion und ihrer Derivirten erweitert für solche Massen, die sich ins Unendliche erstrecken können, oder deren Dichtigkeit in gewissen Punkten, Linien und Flächen (Ausnahmestellen) unendlich gross werden darf, und wurden auch für diese Fälle den Dirichlet'schen nachgebildete Kriterien aufgestellt. — Zur Untersuchung der Funktionen V etc. bei ins Unendliche sich erstreckenden Massen bediente sich sowohl Lipschitz als Christoffel des sogenannten Thomson'schen Ab- oder Umbildungs-Princips (s. unten § 14); von Ausnahmestellen behandelt Lipschitz nur Punkte, während

Christoffel auch Ausnahme-Linien und Flächen in den Kreis der Betrachtung zieht.

Folgende Sätze mögen als einige der Resultate aus den genannten Untersuchungen angeführt sein:

1) V sowohl als seine ersten Derivirten sind in einem von jeder andern Ausnahmestelle getrennten Ausnahmepunkte P endlich, stetig und eindeutig bestimmt, sobald die Produkte $R^2 \frac{\partial V}{\partial x}$, $R^2 \frac{\partial V}{\partial y}$, $R^2 \frac{\partial V}{\partial z}$ bei jeder unbegrenzten Abnahme der Entfernung R vom Punkte x, y, z bis zum festen Punkte P stetig gegen Null convergiren. (Lipschitz und Christoffel.)

2) Ein einwerthiges Potential und seine ersten Derivirten können auf einer Linie von endlicher Länge, die von jeder andern Ausnahmestelle getrennt ist, weder unendlich, noch unbestimmt, noch unstetig sein, sobald die Produkte $R \cdot \frac{\partial V}{\partial x}$, $R \cdot \frac{\partial V}{\partial y}$, $R \frac{\partial V}{\partial z}$ bei jeder unbegrenzten Abnahme der kürzesten Entfernung R vom Punkte x, y, z bis zur festen Linie stetig gegen Null convergiren. (Christoffel.)

Christoffel classificirte die einwerthigen Potentiale nach ihren Verstössen gegen die allgemeinen Bedingungen und stellte für jede Klasse die Form des betreffenden Potentialausdrucks auf. Nach Ausschluss des Falles, wo V oder eine seiner ersten Abgeleiteten in allen Punkten einer Fläche unendlich oder unbestimmt wird, ergeben sich folgende 4 Klassen:

I. Die Bedingungen sind im ganzen Raume erfüllt.

II. Ausnahmepunkte, bei welchem obiger Satz 1 nicht erfüllt wird, sind vorhanden.

III. Ausnahmelinien, bei denen Satz 2 nicht anwendbar ist, kommen vor.

IV. Beim Durchgang durch eine Fläche von endlicher Ausdehnung erleiden V oder seine ersten Abgeleiteten plötzliche Änderungen.

Nach dem Vorgange von Lipschitz und Christoffel behandelten auch Clausius und Betti[7]) die Potentiale von Massen mit Berücksichtigung von Ausnahmestellen, und man kann wohl behaupten, dass dieser Teil der Potentialtheorie in erschöpfender Weise, besonders durch Christoffel, zum Abschluss gebracht worden ist.

---

[1]) Dirichlet-Grube: Vorlesungen § 3 u. 4. — Heine: Kugelf. II. § 17 S. 31—42. — Vrgl. Riemann-Hatt. §. 6—8; Betti: Teorica etc. § VI u. VII; Clausius: Potential § 11 u. 14.

[2]) Dirichlet-Grube: Vorl. S. 15 u. 28; schon ausgesprochen 1845 in der Anm. 3 citirten Abh. — Vrgl. Riem.-Hatt. S. 68 u. Kirchhoff: Vorlesungen S. 175, welche die Grenzwerthe von rV, $r^2 \frac{\partial V}{\partial x}$ etc. näher bestimmen; ferner Somoff: Mechanik II. S. 185. § 27. — Über den Satz aus der Mechanik

vergl. Poisson: Mechanik 2. Aufl. § 99; Resal: Méc. cél. p. 126; Moigno: Méc. anal. p. 460.

[3]) Dirichlet: Sur un moyen général de vérifier l'expression du potentiel relatif à une masse quelconque, homogène ou hétérogène. Crelle J. Bd. 32. S. 80—84. — Dirichlet-Grube § 7. — Betti: Teorica § X reproducirt den ersten Dirichlet'schen Beweis. — Vrgl. Riem.-Hatt. § 22; Somoff: Mechanik II. S. 229.

[4]) Dirichlet, am Schluss der vorher citirten Abhandlung; ferner Vorles. 2ter Abschnitt. — Den Potentialausdruck selbst (für das Ellipsoid) leitete Dirichlet ab in der Abhandlung: Über eine neue Methode zur Bestimmung vielfacher Integrale. Der Berliner Akad. vorgelegt 14. Febr. 1839. Abh. der Berliner Akad. aus dem J. 1839. Berlin 1841. S. 61; übersetzt in Liouville J. IV. 1839. S. auch Meyer: Dirichlet's Vorlesungen über bestimmte Integrale. § 173 und 177; ferner Paraira: Over de Methoden etc. p. 178—187.

[5]) Lipschitz: Untersuchungen über die Anwendung eines Abbildungsprincips auf die Theorie der Gravitation. Crelle J. Bd. 61. 1863. S. 22—65. § 1.

[6]) Christoffel: Zur Theorie der einwerthigen Potentiale. Crelle J. Bd. 64. 1865. S. 321—368.

[7]) Clausius: Potentialf. S. 129—136. Betti: Teorica. § XXII. p. 141 – 150.

§ 5.

Das Flächen-Potential und seine charakteristischen Eigenschaften.

Das Flächenpotential, d. h. das Potential eines Agens, welches keinen körperlichen Raum einnimmt, sondern so auf einer Fläche ausgebreitet ist, dass Anziehungs- oder Abstossungskräfte von den Teilen dieser Fläche ausgehend angenommen werden, verdankt seine Einführung der mathematischen Behandlung der Lehre von der Elektricität.

Cavendish und Coulomb wiesen zuerst nach, dass elektrisirte Körper nach einem Gesetze auf einander wirken, welches ganz analog ist dem Newton'schen Gravitationsgesetz, ausserdem zeigte Coulomb experimentell, dass freie Elektricität, also das hier in Betracht kommende Agens, sich nur auf der Oberfläche der Körper ansammelt, hier eine unendlich dünne Massenschicht bildet, deren Form und Dichtigkeit von der Form des Körpers abhängt und die nach Innen keine Wirkung ausübt. Poisson unterzog in mehreren grundlegenden berühmten Abhandlungen die Erscheinungen der Elektricität (1812) und des Magnetismus (1821—26) einer streng mathematischen Behandlung, und führte dabei den Begriff des Potentials in diese Gebiete der Physik ein; aber erst Green begründete 1828 die allgemeine Theorie der statischen Elektricität und des Magnetismus in ihrer heutigen Gestalt, indem er generell von Potentialbetrachtungen ausging und dabei einige wichtige allgemeine Theoreme aufstellte.[1])

Poisson[2]) bewies 1812 folgenden fundamentalen Satz: Eine auf einer Fläche ausgebreitete Massenschicht („une couche infiniment mince") übt an jeder Stelle nach beiden Seiten der Fläche hin auf unendlich nahe Punkte Wirkungen von der Art aus, dass die Summe der beiderseits in der Richtung der Normale resultirenden Wirkungen gleich $-4\pi\varrho$ ist,

wenn ϱ die im Fusspunkte der Normale herrschende Flächendichtigkeit bedeutet. Für diesen Satz gab Poisson einen synthetischen Beweis, der ihm, wie er sagt, teilweise von Laplace mitgeteilt worden war; er besteht hauptsächlich in einem direkten Aufsuchen der Wirkung, welche von den einzelnen Teilen der Fläche ausgeht.

Dass eine elektrische Schicht auf einen Punkt in ihrer nächsten Nähe diesem Gesetze gemäss wirkt, hatte bereits Coulomb 1788 erkannt; nachdem er es bei der Kugelfläche experimentell nachgewiesen hatte (für welchen speziellen Fall es übrigens schon 1759 von Lagrange aufgestellt worden war), und es bei beliebig gestalteten Flächen durch das Experiment bestätigt zu finden glaubte, schloss er durch ein Raisonnement, ähnlich dem wie es später Poisson anwendete, dass das Theorem allgemeine Giltigkeit haben müsse.[3]) — Der Satz wurde zwar von Coulomb formell weder in obiger noch in einer ihr ähnlichen Fassung ausgesprochen und auch nicht für jede Art anziehend oder abstossend wirkender Flächenschichten behauptet, sondern dies geschah erst von Poisson; es wäre aber doch ungerecht, ihm den Namen „Poisson's Theorem", oder gar, weil der Poisson'sche Beweis teilweise von Laplace herrührt, „Laplace's Theorem" beizulegen, wie es oftmals geschieht, zumal er in seiner endgiltigen, jetzt allgemein gebräuchlichen Fassung auch nicht bei Poisson, sondern erst bei Green sich vorfindet.

Den ersten analytischen Beweis, gegründet auf die allgemeinen Formeln für die Attraktion, lieferte Cauchy[4]) 1815, der auch den Satz insofern erweiterte, dass er ihm eine Form gab, in welcher er nicht blos für die Componente normal zur Fläche, sondern für irgend eine Componente in beliebiger Richtung Geltung hat. Weitere Beweise für die Poisson'sche Form des Satzes gaben Chasles, Resal, Somoff, Wassmuth, Thomson, Maxwell.[5]) — Poisson selbst kam später noch einmal auf das Theorem zurück bei Gelegenheit der Bestimmung der Attraktion eines Sphäroides[6]), und zeigte mit Hilfe der Kugelfunktionen seine Giltigkeit für solche spezielle Flächen. — Erst durch Green (1828), und unabhängig von diesem durch Gauss (1840) wurde der Satz in die jetzt übliche Potentialform eingekleidet und durch wesentlich andere Hilfsmittel bewiesen, nachdem das Flächenpotential als solches speziell ins Auge gefasst worden war.

Durch die Untersuchungen von Green und Gauss wurden folgende Resultate in Bezug auf das Flächenpotential[7]) $V = \int \frac{\varrho\, ds}{r}$ (ϱ = Flächendichtigkeit, ds ein Element der Fläche, die Integration ist über die ganze Fläche auszudehnen) festgestellt: V ist eine im ganzen Raume stetige Funktion der Coordinaten des afficirten Punktes, ausserhalb der Fläche sind auch sämmtliche Derivirten von V stetig und die zweiten partiellen Abgeleiteten erfüllen die Gleichung $\Delta V = 0$.

Während V überall stetig ist, zeigen seine Derivirten beim Durchschreiten der Fläche ein wesentlich hiervon verschiedenes Ver-

halten. Bezeichnet $\frac{\partial V}{\partial n}$ die Abgeleitete von V, genommen nach einer Normale zur Fläche (n von der Fläche aus nach Aussen zu positiv gerechnet), und ϱ die Flächendichtigkeit im Fusspunkte dieser Normale, so ist $\frac{\partial V}{\partial n}$ beim Durchgange durch die Fläche unstetig, und zwar so, dass $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{-0} = -4\pi\varrho$ ist. Mit $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{+0}$ und $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{-0}$ sind hier die Grenzwerte bezeichnet, denen sich $\frac{\partial V}{\partial n}$ nähert, wenn der Punkt von der positiven, resp. negativen Seite aus unendlich nahe an die Fläche heranrückt.

Da $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{+0}$ und $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{-0}$ nach der Definition des Potentials nichts anderes sind, als die Grössen der Kräfte, mit welchen unendlich nahe an der Fläche (aussen resp. innen) liegende Punkte in normaler Richtung zu ihr afficirt werden, so sagt obige Formel in ihrer mechanischen Interpretation genau dasselbe aus, wie der von Poisson formulirte Satz über die Anziehung einer Fläche.

Die zuletzt angegebene Einkleidung des Satzes kommt, wie schon bemerkt, zuerst bei Green vor; Green leitete das Theorem direkt aus der nach ihm benannten Formel ab (s. § 7) und zeigte, wie es sich unmittelbar verwerten lasse zur Bestimmung der Flächendichtigkeit, wenn die Potentialwerte innerhalb und ausserhalb einer geschlossenen Fläche bekannt sind. Der Green'sche Beweis wurde reproducirt von Beer, Kötteritzsch, Maxwell u. A.[8])

Einen mehr direkten und bis ins Einzelne sorgfältigeren Beweis, bei welchem auch auf die Krümmung der Fläche Rücksicht genommen und der Durchgang des Punktes durch die Fläche in beliebiger Richtung mit in Betracht gezogen wird, lieferte Gauss (A. L. 13—18). Er verlegte den Anfangspunkt des rechtwinkligen Coordinatensystems in die Fläche und zwar so, dass die x-Axe normal zur Fläche steht, und zeigte durch direkte Berechnung und Vergleichen der dabei auftretenden Grössen unendlich kleiner Ordnungen, dass „man diesen wichtigen Satz so ausdrücken kann: Der Grenzwert von X bei unendlich abnehmenden positiven x ist $X - 2\pi\varrho$, bei unendlich abnehmenden negativen x hingegen $X + 2\pi\varrho$, oder X ändert sich zweimal sprungweise um $-2\pi\varrho$, indem x aus einem negativen Wert in einen positiven übergeht, das erstemal, indem x den Wert 0 erreicht, und das zweitemal, indem es ihn überschreitet.“ Die Untersuchung der Grössen Y und Z bei der angenommenen Lage des Coordinaten-Systems ergiebt ihre Stetigkeit im ganzen Raume, daher resultirt durch Summirung schliesslich das in Rede stehende Theorem. Bezeichnet t eine beliebige Richtung, so ergiebt sich nach Gauss (A. L. 18) als

Form des von Cauchy zuerst angegebenen allgemeinern Satzes in der jetzt üblichen Schreibweise: $\left(\frac{dV}{dt}\right)_{+0} - \left(\frac{dV}{dt}\right)_{-0} = -4\pi\varrho\cos\vartheta$, wenn ϑ der Winkel ist, welchen t mit der Normale zur Fläche bildet.

Die Beweise von Dirichlet, Riemann, Clausius, Betti und Kirchhoff halten mehr oder weniger den von Gauss eingeschlagenen Gang inne; einen andern Beweis führte Scheibner mit Hilfe Fourier'scher Integrale.[9])

Dirichlet wies 1846 in einer kurzen Notiz[10]) darauf hin, dass die in diesem § aufgeführten vier Eigenschaften des Flächenpotentials bestimmend für dasselbe sind und nannte sie deshalb die charakteristischen Eigenschaften des Flächenpotentials. Den Beweis hiefür, ganz demjenigen für das Körperpotential nachgebildet, gab er in seinen Vorlesungen.

Die Untersuchungen über Discontinuitäten der zweiten Differentialquotienten des Flächenpotentials datiren erst aus neuester Zeit, obwohl die Anfänge hiezu bis zu Green hinaufreichen, der bei Gelegenheit der mathematischen Behandlung der Theorie der Leydener Flasche eine diesbezügliche Formel aufstellte, welche später noch von Clausius und Betti in verschiedener Weise abgeleitet und erweitert wurde.[11]) Green fand folgenden Ausdruck für $\frac{\partial^2 V}{\partial n^2}$ in einem Punkte einer Fläche constanten Potentials: $\frac{\partial^2 V}{\partial n^2} = 4\pi\varrho\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$, worin ϱ die Dichtigkeit und R_1 und R_2 die Hauptkrümmungsradien der Fläche im betrachteten Punkte bedeuten. Paci[12]) zog (1877) hieraus den Schluss, dass die zweiten Derivirten des Flächenpotentials beim Durchgange durch die Fläche in der Richtung der Normale allgemein sich um $4\pi\varrho\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$ ändern, bewies dies direkt aber nur für die Ellipsoid-Fläche, und übertrug es auf den allgemeinen Fall einer beliebigen Fläche dadurch, dass er sich an der Durchgangsstelle die Fläche durch ein osculirendes Ellipsoid ersetzt dachte. C. Neumann[13]) stellte 1880 ohne Beweise ganz allgemeine Formeln in Gauss'schen geodätischen Coordinaten für die Discontinuitäten der zweiten Derivirten nach verschiedenen Richtungen auf; durch Specialisirung ergab sich ihm daraus auch die von Paci aufgestellte Formel: $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial n^2}\right)_{as} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial n^2}\right)_{is} = 4\pi\varrho\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$ sowie andere bemerkenswerthe Relationen. Beltrami[14]) gab hiefür bald zwei Beweise von grosser Allgemeinheit, und zeigte, dass obige Gleichung, sowie die entsprechende für die zweiten Derivirten einer Doppelbelegung, in einem allgemeinen Theoreme der Funktionentheorie enthalten ist. Auf Veranlassung C. Neumann's stellte im Jahre 1878 die philosophische Fakultät der Universität Leipzig eine Preisfrage, betreffend die zweiten Differentialquotienten des Flächenpotentials; Th.

Horn[15]) behandelte in der Umarbeitung seiner mit dem Preise gekrönten Lösung den Gegenstand in ausführlicher und erschöpfender Weise nach einer von Gauss für die Untersuchung der ersten Abgeleiteten angewendeten, analogen Methode, und kam zu Resultaten, welche mit den von Neumann kurz angedeuteten übereinstimmen.

[1]) Über die bez. Arbeiten von Cavendish, Coulomb u. Poisson vergl. man die Bemerkungen von Green in seinem Essay, Preface, und W. Thomson: Elementary laws of statical electr. (1845) abgedruckt in: Reprint of papers on Electricity and Magnetism. by W. Thomson. 1872. p. 15—17. — Green zeichnet sehr treffend seinen Standpunkt gegenüber demjenigen Früherer (namentlich Poissons) in der historisch sehr beachtenswerthen Vorrede zu seinem Essay durch folgende Sätze: „Although many of the artifices employed in the works before mentioned (Poisson's Mémoires) are remarkable for their elegance, it is easy to see they are adapted only to pecular objects, and that some general method, capable of being employed in every case, is still wanting... By confining the attention solely to that peculiar function on whose differentials they all depend, I was induced to try whether it would be possible to discover any general relations, existing between this function and the quantities of electricity in the bodies producting it."

[2]) Poisson: Mémoire sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs. Mém. de l'Inst. Année 1811. Paris 1812, p. 5 u. 30—34. — Vrgl. Dirichlet-Grube Anm. 14, S. 161—164, wo der Satz nebst Beweis nach dem Original mitgeteilt ist. — Den Poisson'schen Beweis suchte Plana, Mémoire sur la distribution de l'électr. Turin 1845 zu vervollständigen.

[3]) Coulomb: Mémoires de l'Acad. Année 1788. Paris 1791. p. 676—677. — Vrgl. Thomson: Reprint etc. p. 16 Fussnote, und Todhunter his. attr. 993. So offenbar, wie diese Beide es thun, wird man denn doch nicht den Satz aus Coulomb's Darstellung herauslesen können. — Die unseren Gegenstand betreffende Stelle bei Lagrange findet sich nach Todh. hist. attr. 561 in den Miscellanea Taurinensia. Vol. I. 1759. p. 142—145.

[4]) A. Cauchy: De la différence entre les attractions exercées par une couche infiniment mince sur deux points très rapprochés l'un de l'autre, situés l'un à l'intérieur, l'autre à l'exterieur de cette même couche. Bulletin de la soc. philom. 1815. p. 53—56. — Die Poisson'sche Formel lautet: $R-R'=4\pi\rho$, die Cauchy'sche: $R-R'=4\pi\rho\cos\vartheta$.

[5]) Chasles gelangte zu dem Satze (auch in der Potentialform) durch geometrische Betrachtungen an den Niveauflächen (s. unten § 11) in seinen Theorèmes généraux etc. Connaissance des Tems pour 1845, publ. 1842, art. 25; und durch ein ähnliches Verfahren mit Hilfe der isothermen Flächen bewies W. Thomson das Theorem in: On the uniform motion of heat in homogeneous solid bodies, and its connexion with the mathematical theory of electricity. Cambr. a. Dublin Math. J. 1842. Reprint etc. p. 1—14; s. hiezu die Fussnoten aus dem J. 1854, p. 2 und 6. Ferner Thomson: Propositions in the theory of attraction. Cambr. a. D. Math. J. 1842. Reprint p. 127—132. — Resal: Méc. cél. § 67, Anm. p. 144. — Somoff: Note sur l'attraction exercée par une couche matérielle trés-mince sur un point de sa surface. Bull. de St. Petersbourg, XIII 1869, p. 1—5. — Wassmuth: Zur Theorie des Flächenpotentials, Carl's Repertorium für Physik. XIV. 1878. S. 428—430. — Thomson and Tait: Natural phil. 477, 478. — Maxwell: Electricity etc. 107.

[6]) Poisson: Conn. d. Tems pour 1829. (Paris 1826), p. 376; er verweist hier auf seinen früheren Beweis und auf denjenigen von Cauchy.

[7]) Über die Definition von „Flächenpotential", „Flächendichtigkeit" u. s. w. vgl. man Gauss, A. L. 12, 13; Dirichlet-Grube § 12, 13; Clausius Pot. § 27 u. A., besonders Heine: Kugelf. II. § 22. — Der wesentliche Unterschied zwischen der Poisson'schen Auschauung und der späteren, der sich gerade in der Fassung des Theorems manifestirt, besteht darin, dass nach ersterer wir es noch mit körperlichen, wenn auch sehr dünnen Massen zu thun hätten, während nach letzterer eine ideale, nur auf Flächen ausgebreitete Massenverteilung als ganz neues Element der Betrachtung auftritt.

[8]) Green: Essay, art. 4. — Beer: Einleitung in die Elektrostatik u. s. w.; herausgegeben von Plücker 1865. S. 23. — Kötteritzsch: Electrostatik, S. 42. — Maxwell, Electr. 97a. — Für die Grenzwerte von $\frac{\partial V}{\partial n}$ haben verschiedene Autoren verschiedene Bezeichnungen: Green bezeichnet sie durch einen horizontalen Strich über V, bei ihm lautet die Formel: $\left(\frac{\partial \overline{V}}{dn} + \frac{\partial \overline{V'}}{dn}\right) = -4\pi\rho$. Dirichlet-Grube: $\left(\frac{dV}{dn}\right)_{\alpha+\varepsilon} - \left(\frac{dV}{dn}\right)_{\alpha-\varepsilon} = -4\pi\rho$. C. Neumann: Unters. über das Potential: $\frac{\partial V}{\partial} + \frac{\partial V'}{\partial} = -4\pi\rho$. Kirchhoff, Vorl. S. 179 $\frac{\partial V}{\partial n_i} + \frac{\partial V}{\partial n_a} = -4\pi\rho$ u. s. w. Die im Texte gebrauchte Bezeichnungsweise rührt von Clausius her und wurde auch von Kötteritzsch, Riemann u. A. angewendet; s. Clausius, Pot. S. 73 Anm. — Die Verschiedenheit in den Vorzeichen rührt von der Richtungsannahme der zu- oder abnehmenden Normale her.

[9]) Dirichlet-Grube, § 14. — Riem.-Hatt., § 14 u. 15. — Clausius, Potentialf. § 28–37. — Betti, Teorica etc. § VIII. — Kirchhoff, Vorlesungen, S. 177. — Scheibner. Über das Flächenpotential. Crelle J. Bd. 54. S. 77.

[10]) Dirichlet: Über die charakteristischen Eigenschaften des Potentials einer auf einer oder mehreren Flächen verteilten Masse. Monatsber. der Berl. Akad. 1846. S. 211—212. Vorl. § 15. — S. auch Betti, Teorica etc. § X.

[11]) Green: Essay. art. 8. — Clausius: Abhandlungen zur mechanischen Wärmetheorie (1866). II. S. 74—79. — Betti, Teorica, Cap. II, § XVI.

[12]) Paci: Sopra la funzione potenziale di una massa distribuita su di una superficie. Giornale di Mat. da Battaglini. XV. 1877. p. 289—298.

[13]) C. Neumann: Neue Sätze über das Newton'sche Potential. Math. Ann. XVI. 1880. S. 432—438, besonders § 4, Formel D, E u. F.

[14]) Beltrami: Intorno ad alcuni nuovi teoremi del Sig. Neumann sulle funzioni potenziali. Ann. di Mat. (serie II). X. 1880. p. 46—63, besonders p. 59 u. f. — Beltrami leitet folgende Formel ab:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial n^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial n'^2} = -\triangle_2(\varphi_n - \varphi_{n'}) - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n} + \frac{\partial\varphi}{\partial n_1}\right) + (\triangle_2\varphi)_n - (\triangle_2\varphi)_{n'}$$

(φ_n u. $\varphi_{n'}$ sind die Werthe, welche φ auf der positiven resp. negativen Seite der Fläche annimmt) und bemerkt in Bezug hierauf (p. 62): „E questa la formola che esprime la discontinuita della seconda derivata normale d'une funzione qualunque, attraverso ad una superficie, per mezzo dei valori che la funzione stessa, la sua prima derivata normale e il suo secondo parametro differenziale (completo) prendono da ambedue le parti della superficie, nell' immediata prossimità di essa."

[15]) Th. Horn: Die Discontinuitäten der zweiten Differentialquotienten des Oberflächenpotentials. Schlöm. Z. XXVI. 1881. S. 145—156 u. 209—230.

§ 6.

Das Linien- und Punkt-Potential.

Der Vollständigkeit halber sei auch dieser Potentialfunktionen gedacht, die zwar praktisch weniger wichtig sind, jedoch bei Vorkommen von Ausnahmestellen (§ 5 gegen Schluss) eine Rolle spielen. Der Ausdruck für das Potential einer gleichförmig mit Agens bedeckten geraden Linie wurde zuerst von Green aufgestellt. Der Verlauf der Potentialfunktionen von Linien und Punkten, sowie das Verhalten der Derivirten dieser Funktionen wurde von Christoffel, Clausius und Betti untersucht, es ergab sich als besondere charakteristische Eigenschaft des Linienpotentials, dass die Grenzwerte von $\frac{V}{log\ r}$ und $r\frac{\partial V}{\partial r}$ bei unendlicher Abnahme der Entfernung r des afficirten Punktes von der Linie gleich -2ϱ werden, wenn ϱ die Liniendichtigkeit ist, in Zeichen: $\left(\frac{V}{log\ r}\right)_0 = -2\varrho$; $\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)_0 = -2\varrho$. Für das Punktpotential existiren die entsprechenden charakteristischen Gleichungen: $(rV)_0 = \varrho$ und $\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)_0 = \varrho$.

Green: Essay. art. 12. — Christoffel, Zur Theorie der einwerthigen Potentiale. Cr. J. Bd. 64. — Clausius, Potentialf. §§ 37—39 u. 51. — Betti, Teorica etc. Cap. I. § V u. X. — Riem.-Hatt. § 17.

§ 7.

Die Green'schen Formeln. — Green's „Essay" und Gauss' „Allgemeine Lehrsätze."

Von überaus grosser Fruchtbarkeit für die Potentialtheorie sowie für die Funktionentheorie ist ein analytischer Satz, den man Green verdankt, und der deshalb „Green'scher Satz" oder „Green'sche Formel" genannt wird. Bei Besprechung desselben mögen hier einige Worte über Green's Stellung in der Geschichte des Potentials Platz finden.

Die Green'sche Schrift: „An Essay on the application of mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism" erschien 1828 in Nottingham, blieb aber selbst in England lange Zeit unbeachtet und unbekannt (nur Murphy scheint sie benützt zu haben), bis durch die Abhandlung von Gauss: „Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte" 1840 das Interesse der Fachmänner für den in beiden Schriften behandelten Gegenstand sehr stark

angeregt wurde. Für Letzteres zeugt namentlich der Umstand, dass die Gauss'sche Arbeit bald nach ihrem Erscheinen in Übersetzungen in einer französischen und einer englischen Fachzeitschrift aufgenommen wurde[1] und Liouville, Chasles, Thomson u. A. sich eingehend mit ihr beschäftigten. Thomson wurde 1845 durch einige bei Murphy sich vorfindende Bemerkungen auf die Green'sche Schrift aufmerksam gemacht[2], er verschaffte sich ein Exemplar hievon und veröffentlichte dieselbe abermals mit kurzer Biographie und einleitenden Notizen im Crelle'schen Journal für reine und angewandte Mathematik Bd. 39, 44 und 47; später (1871) wurde sie nochmals abgedruckt in „Mathematical Papers of the late George Green." Edited by N. M. Ferrers. p. 1—115.

Green's Bestreben war darauf gerichtet, allgemeine Theoreme aufzustellen, mit deren Hilfe die Theorie der Elektricität und des Magnetismus von einem einheitlichen, erhöhteren Standpunkte aus behandelt werden kann (s. oben § 5 Anm. 1); als geeignetstes Mittel hiezu bot sich ihm die Funktion V dar (der er den Namen „potential function" beilegte), über welche bereits mehrere Sätze, aber ohne rechten ersichtlichen Zusammenhang, bekannt waren, und die er deshalb vor Allem einer systematischen Behandlung unterwarf. So wurde Green neben Gauss der eigentliche Schöpfer der Potential-Theorie. Gauss begründete diese Theorie in umfassenderem Sinne, wie schon der Titel seiner Abhandlung besagt, auch ist die Methode der Ableitung der Sätze bei Beiden eine verschiedene, es finden sich ferner bei dem Einen Lehrsätze, die bei dem Andern fehlen oder nur mehr oder weniger angedeutet sind, doch hat man, im Ganzen genommen, die Haupt-Theoreme der mathematischen Theorie des Potentials Beiden zu verdanken.[3])

An die Spitze der eigentlichen Entwicklung stellte Green einen wichtigen Satz („we shall in the first place lay down a general theorem which will afterwards be very useful to us"), den er so aussprach (Essay art. 3): „Es seien U und V zwei continuirliche Funktionen der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z, deren Derivirte in keinem Punkte innerhalb eines beliebig gestalteten festen Körpers unendlich werden, dann ist:

$$\int dx\,dy\,dz\,U\Delta V + \int d\sigma\,U\frac{\partial V}{\partial n} = \int dx\,dy\,dz\,V\Delta U + \int d\sigma\,V\frac{\partial U}{\partial n};$$

die dreifachen Integrale erstrecken sich über das ganze Innere des Körpers, diejenigen in Bezug auf $d\sigma$ über dessen Oberfläche, von welcher $d\sigma$ ein Element bedeutet, dn ist eine unendlich kleine Linie senkrecht zu dieser Fläche und gemessen von der Oberfläche gegen das Innere des Körpers." Green leitete diese Gleichung durch partielle Integration des dreifachen Integrals:

$$\int dx\,dy\,dz\left(\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

ab, ein Verfahren, das auch von Anderen beibehalten wurde.[4]) Der grösseren Übersichtlichkeit halber wird die Gleichung häufig in den kürzeren Formen:

$$\int U \Delta V \, d\tau + \int U \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = \int V \Delta U \, d\tau + \int V \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma$$

und

$$\int (U \Delta V - V \Delta U) \, d\tau = \int \left(U \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial V}{\partial n} \right) d\sigma$$

gegeben ($d\tau$ ist ein Volumelement des Körpers). Öfters wird auch eine in Green's Ableitung des Hauptsatzes vorkommende Zwischengleichung als Green's Theorem oder Formel bezeichnet, nämlich die Gleichung:

$$\int \left(\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \frac{\partial V}{\partial z} \right) d\tau = -\int U \Delta V \, d\tau - \int U \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma.$$

Green zeigte, wie die Gleichung sich gestaltet, wenn U oder V in einem Punkte innerhalb des Körpers unendlich wird, und Clausius untersuchte dann ferner was aus ihr wird, wenn überhaupt Ausnahmestellen vorhanden sind. — Helmholtz machte 1858 die Bemerkung, dass für mehrfach zusammenhängende Räume (in Riemann'schem Sinne) die Green'sche Gleichung ihre Giltigkeit verliert; W. Thomson brachte hierauf 1867 an ihr die nötigen Modificationen an, um ihre Anwendbarkeit bei Betrachtung selbst mehrwertiger Funktionen in solchen Räumen zu sichern.[5])

Die Fruchtbarkeit der Green'schen Gleichung zeigt sich besonders in dem grossen Reichtume sehr verwerthbarer Formeln, die unmittelbar aus ihr fliessen, je nachdem man für U oder V specielle Funktionen wählt, oder sie gewissen Bedingungen unterwirft. Eine übersichtliche Zusammenstellung solcher für die Potentialtheorie verwendbarer Formeln nebst kurzer Andeutung zu ihrer Ableitung giebt C. Neumann in seinen „Untersuchungen über das Potential" 1877 S. 17—23.

Schliesslich sei hier schon bemerkt, dass in der Folge zum Zwecke sowohl funktionentheoretischer als Potential-Betrachtungen in der Ebene wie im n dimensionalen Raume den Green'schen analoge Gleichungen aufgestellt wurden, die auch da sich von hervorragender Bedeutung, als ein weitreichendes Instrument der Forschung erwiesen.

---

[1]) Die Gauss'sche Abhandlung erschien zuerst in „Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im J. 1839. Herausgegeben von C. F. Gauss und W. Weber. Leipzig 1840" S. 1—51; abgedruckt in Gauss' Werke Bd. V. Eine französische Übersetzung erschien in Liouville, Journ. des Mathem. t. VII. 1842. p. 273—324; eine englische in Taylor's Scientific Memoires. April 1842. — Das Kapitel über das Potential in Moigno, Méc. analyt. p. 550—582, redigirt von Lindelof, ist einfach ein Auszug aus der Gauss'schen Schrift, ebenso ist das Werk von Urbansky: Theorie des Potentials und dessen Anwendung auf Elektricität, Berlin 1864, zum allergrössten Teil eine Paraphrase der Gauss'schen Allgem. Lehrs.

[2]) Vrgl. das Vorwort Thomson's zu Green's Essay in Cr. J. Bd. 39, ferner seine Randbemerkungen in Phil. Magazine I (1854) p. 503 oder Reprint of papers etc. p. 2 „It was not until early in 1845 that the author, after having inquired for it in vain for several years, in consequence of an obscure allusion to it in one of Murphy's papers, was fortunate enough to meet with a copy of the remarkable paper (Green's Essay) in which this great advance in physical mathematics was first made" etc. Ferner Phil. Mag. 1854, oder Reprint of papers etc. p. 17: „This memoir of Green's has been unfortunately very little know, either in this country or on the Continent. Some of the principal theorems in it have been re-discovered within the last few years" etc. und ib. p. 126: „Ever since I have been trying to see Green's memoir, but could not hear of it from anybody till to-day, when I have got a copy from Mr. Hopkins. Jan. 25, 1845."

[3]) Helmholz bemerkt bei Besprechung des Green'schen Essay in: Fortschritte der Physik im J. 1852 S. 454: „Die Methode von Green bei Herleitung der Sätze ist mehr analytisch und deshalb kürzer als die von Gauss; dagegen hat der Letztere auf dem von ihm eingeschlagenen Wege die Schwierigkeiten und Zweifel sorgfältiger und gründlicher beseitigt, welche bei den Beweisführungen dadurch entstehen, dass die Potentialfunction und ihre Differential-Quotienten an einzelnen Stellen discontinuirlich oder unendlich werden."

[4]) Vrgl. Clausius, Potentialf. § 40 u. 41. — C. Neumann, Allgemeine Lösung des Problems u. s. w. 1862. S. 16—20. — Beer, Einleitung in die Elektrostatik etc. S. 14—20. — Thomson and Tait, Nat. phil. Appendix A. (a) „Ausdehnung des Green'schen Satzes". — Dirichlet-Grube S. 30. — Riem.-Hatt. § 20. — Betti, Teorica. Cap. I § XI. — Kirchhoff, Vorl. S. 183. — Maxwell, Electr. art. 96. — Somoff, Mechanik II. S. 148, u. A.

[5]) Helmholtz, Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen u. s. w., Crelle J. Bd. 55. S. 29 Anm. u. 31. — W. Thomson, On vortex motion. Transactions of R. S. of Edinb. XXV. § 54—57. — S. Maxwell, Electr. and Mag. 96 b) u. c), der die Thomson'sche Modification angiebt und kurz ableitet. (Vrgl. dagegen Zehfuss, Beiträge zur Theorie der statischen Elektricität. Progr. der höhern Gewerbeschule zu Frankfurt a/M. 1865/66. S. 9).

§ 8.

Einige Gauss'sche Theoreme. — Arithmetisches Mittel, Maxima und Minima des Potentials.

Der Green'schen Formel und ihrer Anwendung bei Beweisen von Sätzen der Potentialtheorie wurde schon einige male Erwähnung gethan; Green selbst nahm von ihr seinen Ausgangspunkt zur Deduktion des wichtigsten Satzes der ganzen Theorie, welcher besagt, dass die Funktion V im ganzen Raume eindeutig bestimmt ist, wenn ihre Werte auf der Oberfläche dieses Raumes bekannt sind. Doch bevor zur geschichtlichen Behandlung dieses Theorems geschritten werden kann, ist es nötig, einiger speciell Gauss'scher Sätze zu erwähnen, die an und für sich von Wichtigkeit sind und überdiess auf anderem Wege, als auf dem von Green eingeschlagenen, zu jenem Theoreme hinführen, wie aus der Gauss'schen Darstellung ersichtlich ist. Diese Sätze betreffen die relativen Werte des Potentials in verschiedenen Stellen des Raumes, und den Zusammenhang des Potentials mit den es erzeugenden Massen. (Gauss bezeichnet sie A. L. 18 als „eine Reihe neuer Lehrsätze").

Aus der Definition des Potentials leitete Gauss (A. L. 19) den Satz ab: Bezeichnen M', M'', M''' . . . die Elemente eines Massensystems, m', m'', m''' . . . diejenigen eines andern Systems, sind V', V'' V''' etc. die Potentialwerte des ersteren in den Punkten des letzteren und v', v'', v''' etc. diejenigen des zweiten Systems in den Punkten des ersten, so findet die Relation statt:
$M' v' + M'' v'' + \ldots = m' V' + m'' V'' + \ldots$ oder $\Sigma M v = \Sigma m V$; bildet das eine oder das andere System (oder beide) eine continuirliche Masse, so geht das Summenzeichen in das entsprechende Integral über. Mit Hilfe dieses Satzes zeigte Gauss (art. 20), dass der Wert von V im Mittelpunkte einer Kugel (in Bezug auf eine beliebig verteilte Masse) dem arithmetischen Mittel seiner Werte in den Punkten ihrer Oberfläche gleich ist. C. Neumann[1]) nannte dieses Theorem „Gauss'scher Satz des arithmetischen Mittels", und verallgemeinerte es dadurch, dass er einen ganz entsprechenden Satz für eine beliebige geschlossene Fläche aufstellte.

Den Satz des arithmetischen Mittels benützte Gauss um nachzuweisen (art. 21), dass das Potential in einem von Masse freien Punkte weder ein Maximum noch ein Minimum haben kann, sondern einen constanten oder einen Uebergangswert besitzen muss[2]). Zum Zwecke der näheren Untersuchung darüber, wann einer der letztgenannten Werte auftritt und wie derselbe genauer beschaffen ist, stellte Gauss einige Lehrsätze auf, die auch anderweitig in der Potentialtheorie Verwertung finden und von Anderen nach verschiedenen Methoden abgeleitet wurden, weshalb sie hier gleich ihren Platz finden mögen.

Der erste Satz lautet: „Ist ds das Element einer einen zusammenhängenden endlichen Raum begrenzenden Fläche, P die Kraft, welche irgendwie verteilte Massen in ds in der auf die Fläche normalen Richtung ausüben, so wird das Integral $\int P ds$ über die ganze Fläche ausgedehnt $= 4\pi M + 2\pi M'$, wenn M das Aggregat der im Innern des Raumes befindlichen Massen, M' das auf der Oberfläche nach der Stetigkeit verteilten bedeuten." Der Beweis hiefür ergiebt sich bei Gauss durch Anwendung eines aus der Theoria attractionis bekannten Theorems (s. oben S. 8). Übertragen auf das Potential folgt hieraus, dass (art. 23): „bei irgendwie verteilten Massen die Gleichung $\int \frac{\partial V}{\partial n} ds = 4\pi M$ allgemein giltig ist, wenn M die im inneren Raume enthaltene Masse bedeutet, wobei, wenn auf der Oberfläche selbst stetig verteilte Massen sich befinden, diese den inneren zugerechnet oder davon ausgeschlossen werden müssen, je nachdem man für $\frac{\partial V}{\partial n}$ den auf die Aussenseite oder auf die Innenseite sich beziehenden Wert gewählt hat." Obige Gleichung lässt sich auch direkt aus der Green'schen Formel ableiten, wie Beer,

Clausius, Neumann u. A.[3]) gezeigt haben. Nach fast gleicher Methode wie Gauss gelangte Chasles selbständig zu dem Theorem, das Sturm[4]) in weiterer Begründung der (vermeintlich) Chasles'schen Sätze aus der Gleichung $\Delta V = -4\pi\varrho$ zu erweisen suchte. — Anschliessend an obigen Satz stellte Gauss einen weiteren „wichtigen Lehrsatz" (art. 24) auf, der sich in der Gleichung ausspricht:

$$\int V \frac{\partial V}{\partial n} ds = -\int \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \right] d\tau.$$

(τ ist der von der Fläche s umschlossene Raum), für welchen Gauss einen selbständigen analytischen Beweis lieferte; er ist ebenfalls eine unmittelbare Folge des Green'schen Satzes, indem man in der 3. Formel (oben S. 24) $U = V$ und $\Delta V = 0$ setzt.[5])

Die bisher angeführten Sätze dienten nun Gauss dazu (A. L. 25—28), mehrere Lehrsätze über constante und extreme Werte des Potentials in den verschiedenen in Betracht kommenden Räumen zu beweisen, von denen folgende angeführt sein mögen: „Wenn von Massen, welche sich blos innerhalb des endlichen Raumes T oder auch ... auf dessen Oberfläche S sich befinden, das Potential in allen Punkten von S einen constanten Wert $= A$ hat, so wird das Potential in jedem Punkte des äussern unendlichen Raumes T' erstlich, wenn $A = 0$ ist, gleichfalls $= 0$, zweitens, wenn A nicht $= 0$ ist, kleiner als A und mit denselben Zeichen wie A behaftet sein." „Der erste Fall, $A = 0$, kann nur dann stattfinden, wenn die Summe aller Massen selbst $= 0$ ist, und der zweite nur dann, wenn diese Summe nicht $= 0$ ist." — C. Neumann[6]) hat (1871 und 1877) in systematischer Weise, alle vorkommenden Fälle berücksichtigend, die extremen Werte des Potentials für gegebene Gebiete untersucht; er ging dabei lediglich von dem Gauss'schen Satze des arithmetischen Mittels aus und gelangte durch einfache Überlegungen und Deduktionen zu 5 allgemeinen Theoremen, in welchen die betreffenden Gauss'chen Sätze als spezielle Fälle enthalten sind. Es sei hier auf die Neumann'sche Darstellung in seinen „Untersuchungen über das Newton'sche und log. Potential" 1877 verwiesen und nur bemerkt, dass die durch Gauss angeregte Untersuchung über Extreme des Potentials zum Abschluss gebracht worden ist durch die Neumann'schen Theoreme, die von nun an einen integrirenden Bestandteil der allgemeinen Theorie des Potentials bilden werden. — Auch Betti[7]) behandelte vollständig die Theorie der Maxima und Minima des Potentials, ebenfalls von dem Gauss'schen Satze des arithmetischen Mittels ausgehend, bewies in ähnlicher Weise, wie Neumann, den Satz über die Constanz des Potentials, und leitete dann daraus alle Sätze über extreme Werte von V ab.

---

[1]) C. Neumann, Revision einiger allgemeiner Sätze aus der Theorie des Newton'schen Potentials. Math. Ann. III. 1871. S. 424—434, § 2, II u. III, ferner Unters. über das Potential. 1877. S. 24—26, 72 u. 96—101. — Über den

Gauss'schen Satz des arithmetischen Mittels vergl. ferner: Beer, Einleitung S. 18. — Thomson and Tait, Nat. phil. 496, wo sich zwei Beweise finden. — Kirchhoff, Vorl. S. 186 Gleichung 20). — Betti, Teorica, p. 135.

[2]) Vergl. C. Neumann, Unters. S. 29—30. — Dirichlet-Grube § 34. — Riem.-Hatt. § 35. — Einen einfachen und strengen Beweis über die Constanz des Potentials giebt Neumann: Unters. S. 9 (durch Anwendung eines Hilfsatzes S. 50), der sich auf die Entwicklung des Potentials in eine Reihe stützt. — Gleiches s. bei Betti, Teorica p. 137.

[3]) Beer, Einleitung S. 15. — Clausius, Potentialf. § 42. — C. Neumann, Unters. S. 19—21. — Thomson and Tait, Nat. phil. 492. — Riem.-Hatt. § 12. — Somoff, Mechanik II. S. 140.

[4]) Chasles, Théoremes généraux sur l'attraction des corps. Add. à la Conn. d. Tems pour 1845. Paris 1842. p. 24. art. 5.; Sturm, Note sur un Mémoire de Mr. Chasles. Liouville J. VII. 1842, p. 346. — S. auch W. Thomson, Propositions in the theorie of attraction (1843). Reprint p. 126—138.

[5]) S. Kirchhoff, Vorl. S. 185; Neumann, Unters. S. 19 und 21. Die Quadratwurzel aus dem Ausdruck in der Klammer ist nach Lamé's Benennung der Differentialparameter erster Ordnung von V (Leçons sur les coord. curv. p. 6) und wird nach ihm mit $\Delta_1 V$ bezeichnet; Neumann schreibt $\mathfrak{E} V$ für den Klammerausdruck; Unters. S. 16.

6) Neumann: Unters. S. 27—52; Math. Ann. III. S. 424—434. — Die Theoreme sind ohne nähere Begründung zusammengestellt in Math. Ann. XIII. 1878. S. 258—261. — S. auch Thomson a. Tait, Nat. phil. 498, 495—498, wo sich schon einige dieser Sätze befinden; ferner Kötteritzsch, Electrostatik. Cap. 1. § 9.

[7]) Betti, Teorica, Cap. I, § XXI.

§ 9.

Die fundamentalen, funktionentheoretischen Sätze der Potentialtheorie von Green, Gauss, Chasles, Thomson, C. Neumann. — Dirichlet's Prinzip.

Der am Anfange des § 8 angeführte Satz bildet gleichsam das Haupttheorem der Potentialtheorie, Gauss nennt ihn „den wichtigsten Satz der ganzen Untersuchung" (A. L. 33), und in der That nimmt er in manchen Gebieten der mathematischen Physik und der Funktionentheorie eine an der Spitze stehende Stellung ein. Übrigens tritt er und seine aus ihm entspringenden Folgerungen bei verschiedenen Autoren (wie etwa bei Green, Gauss, Thomson, Neumann) in so verschiedenartigen Fassungen auf, dass deren Äquivalenz auf den ersten Blick schwer zu erkennen ist. — Das Verdienst, ihn zuerst entdeckt zu haben, gebührt auch hier Green, die umfassendere Aufstellung und strengere Begründung aber verdankt man Gauss, Thomson, Dirichlet und C. Neumann.

Green stellte in „Essay" art. 4 und 5 zwei Sätze auf, die in losem Zusammenhange unter sich zu stehen scheinen, bei näherer Betrachtung aber in Verbindung mit einander sich als das vollständige, in Rede stehende Theorem herausstellen, das Thomson: „Green's Problem" nennt. Auf Grund seiner Formeln (oben § 7) wies Green zuerst

folgenden Satz nach: Sind V und V' irgend zwei einwertige und stetige Funktionen, welche die Gleichungen $\Delta V = 0$ resp. $\Delta V' = 0$ erfüllen, auf der Fläche σ in einander übergehen: $V = V'$, und von welchen ausserdem V' in unendlicher Entfernung von der Fläche verschwindet, so lässt sich stets ein und nur ein Wert ϱ der Belegung von σ angeben, welche diese Funktionen als entsprechende Potentialfunktionen (V für den innern, V' für den äussern Raum) erzeugt. Der Wert von ϱ ist bestimmt durch die Gleichung: $\varrho = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial n} + \frac{\partial V'}{\partial n'}\right)$ (s. oben § 5).[1] — Der Satz behält nach Green seine Giltigkeit nicht blos für eine Fläche, sondern auch für ein System beliebiger Flächen.

Hierauf sprach Green (art. 5) folgendes Theorem aus: „Wenn der Wert der Potentialfunktion V auf einer geschlossenen Fläche gegeben ist, so giebt es blos eine Funktion, welche die Gleichung $\Delta V = 0$ befriedigt und zugleich die Bedingung erfüllt, im Innern der Fläche keine singulären Werte zu haben." Zur Beweisführung leitete er aus seiner, für einen singulären Punkt im Innern erweiterten Formel die Gleichung ab:

$$\int d\sigma\, U \frac{\partial V}{\partial n} = \int d\sigma\, \overline{V} \frac{\partial U}{\partial n} - 4\pi V_1;$$

hierin ist V_1 der Wert von V in einem Punkte p_1, in welchem U einen singulären Wert besitzt. U sei jetzt $= \frac{1}{r}$ gesetzt, wo r den Abstand des Punktes p_1 von demjenigen Punkte (x, y, z) bezeichnet, worauf sich U bezieht. „Hätten wir nun," schloss Green, „einen Wert von U, welcher ausserdem noch an der Fläche selbst zu Null wird: $U = 0$, so erhielten wir die Gleichung

$$0 = \int d\sigma\, \overline{V} \frac{\partial U}{\partial n} - 4\pi V_1,$$

aus welcher ersichtlich ist, dass der Wert von V in p_1 bekannt, wenn $\overline{V}$ gegeben ist." Um sich von der Existenz einer solchen Funktion U (die Riemann-Hattendorf „Green'sche Funktion" nennt) zu überzeugen, stellte Green eine eigenthümliche, physikalische Betrachtung an, die nicht als mathematischer Beweis dafür gelten kann, dass für jede Fläche eine und nur eine solche Funktion U existirt. Diese Lücke lässt sich aber, wie Riemann zeigte, ausfüllen mit Hilfe eines spezialisirten Gauss'schen Satzes, oder durch Anwendung des sogenannten Dirichlet'schen Prinzips[2].

Es seien hier noch einige Folgerungen erwähnt, welche aus der oben angeführten Green'schen Gleichung von Beer, Clausius, Neumann, Kirchhoff u. A.[3] gezogen wurden. Setzt man $U = \frac{1}{r}$

so lautet die Gleichung:

$$V_1 = \frac{1}{4\pi}\int\left(\overline{V}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r}\frac{\overline{\partial V}}{\partial n}\right)d\sigma.$$

aus der ersichtlich ist, dass V in jedem Punkte des Raumes, in dem keine Masse ist, sich bestimmen lässt, wenn für jeden Punkt der Oberfläche (welche die Masse ein- oder ausschliesst) V selbst sowie der Wert seiner nach der Normale genommenen Derivirten bekannt ist. Kirchhoff zeigte aber mit Zuhilfenahme der oben (S. 27) angeführten Gleichung:

$$\int\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]dv = -\int V\frac{\partial V}{\partial n}d\sigma,$$

dass diese Werte nicht alle willkürlich gegeben sein können; dass vielmehr V für den ganzen Raum vollkommen bestimmt ist, wenn für die ganze Oberfläche V, oder für einen Teil derselben V, für den andern $\frac{\partial V}{\partial n}$ gegeben ist, und V bis auf eine additive Constante bestimmt wird, wenn man $\frac{\partial V}{\partial n}$ für die ganze Oberfläche kennt.

Gauss gelangte zu dem Hauptheoreme der Potentialtheorie auf ganz anderem Wege als Green, aber ebenfalls auf Grund eines allgemeinen funktionentheoretischen Satzes, eingekleidet in die Theorie des Potentials, den er zuerst ausführlich begründete (A. L. 31—34). Er bezeichnete mit U eine Grösse, die in jedem Punkte der Oberfläche einen bestimmten endlichen, nach der Stetigkeit sich ändernden Wert hat, mit V das Potential einer über dieselbe Oberfläche auszubreitenden Masse M. Die Verteilung der Masse kann nach Gauss (A. L. 29) entweder so geschehen, dass die Dichtigkeit überall positiv oder wenigstens nicht negativ ist, oder auch in der Weise, dass sie in einigen Teilen der Fläche positiv, in anderen negativ ist; in letzterem Falle ist M die algebraische Summe der positiven und negativen Massen. Gauss nannte diese Verteilungen gleichartig resp. ungleichartig, C. Neumann (Unters. S. 69) bediente sich hiefür der bezeichnenderen Aus-Ausdrücke monogen und amphigen. — Gauss ging von der Betrachtung des Integrals $\Omega = \int (V - 2U)\,ds$, ausgedehnt über die ganze Fläche aus, zeigte, dass für dasselbe stets ein Minimumwert existiren müsse, und schloss dann daraus: „dass es allemal, wenn nicht eine gleichartige, doch eine ungleichartige Verteilung der Masse M giebt, für welche die Differenz $V - U$ in allen Punkten der Fläche einen gegebenen constanten Wert erhält“ und (art. 34) dass eine solche Verteilung nur auf eine einzige Art möglich ist. (Der constante Wert der Differenz kann selbstverständlich auch $= 0$ sein.) — Den Beweis führte Gauss durch Variirenlassen der Grössen M, Ω und V;

um die Existenz eines Minimum von Ω bei ungleichartiger Verteilung strenge nachzuweisen, sah er sich genötigt, „einen etwas künstlichen Weg einzuschlagen."

Mathieu[4]) suchte (1878) den Gauss'schen Beweisgang zu vereinfachen und durchsichtiger zu machen, und gelangte dabei zu einem Nachweis dafür, dass die Bedingung $V - U = 0$ bei beliebiger, $V - U =$ const. bei gegebener Gesammtmasse stets zu einem Minimum von Ω führt.

Vergleicht man das Gauss'sche Theorem mit den oben angeführten zwei Green'schen Sätzen, so sieht man, dass sie fast ein und dasselbe aussagen; ein hervortretender Unterschied besteht darin, dass die Gauss'sche Funktion U (auf der Fläche gegeben) eine sehr allgemein gehaltene Funktion ist, die blos den Bedingungen der Endlichkeit und Stetigkeit zu genügen hat, während die entsprechende Funktion bei Green zwar auch ziemlich willkürlich sein darf, jedoch den speziellen Charakter einer Potentialfunktion besitzen muss. Gerade gegen diese grosse Allgemeinheit der Funktion U, wie sie hier bei Gauss und dann bei Thomson und Dirichlet auftritt, richten sich, unter anderen Bedenken, die später von Weierstrass, Heine u. A. erhobenen Einwände gegen die Gauss'sche und Dirichlet'sche Beweisführung.

Indem Gauss weiter der allgemein gelassenen Funktion U den speziellen Wert des Potentials einer gegebenen Masse zuerteilte, gelangte er zu einem wichtigen Satze (A. L. 36), den er schon früher bei mehreren Gelegenheiten angekündigt und spezielle Fälle davon mitgeteilt hatte.[5]). Derselbe sagt aus, dass das Potential V_a oder V_i einer in einem Raume beliebig verteilten (körperlichen) Masse durch Belegung der Grenzflächen dieses Raumes mit Masse als Flächenpotential dargestellt werden kann, so dass die Potentiale der ursprünglichen und der neuen Massenverteilung in denjenigen Punkten des Raumes, in welchem die erstere Masse sich nicht befindet, einander gleich sind. — Die Begründung ist bei Gauss selbst eine sehr kurze, ausführlichere Beweise dieses „herrlichen Lehrsatzes", wie Thomson ihn nennt, gaben Dirichlet und Heine.[6])

Gauss bemerkte (A. L. 37), dass die wirkliche Ausmittlung der Flächenbelegung in den meisten Fällen unüberwindliche Schwierigkeiten darbietet; auch Green (Essay 12) machte die gleiche Bemerkung in Bezug auf die Bestimmung der Flächendichtigkeit ϱ (s. oben S. 18) im allgemeinen Falle; Beide zeigten aber auf fast gleiche Weise, dass in einem speciellen Falle, nämlich wenn $U =$ Const., also die Fläche eine Gleichgewichtsfläche ist, diese Bestimmung mit grosser Leichtigkeit geschehen kann. Diesen Fall nennt Thomson den „reducirbaren Teil des Green'schen Problems."[7]).

Fast gleichzeitig mit Gauss untersuchte Chasles[8]) (1837—1842)

den Zusammenhang des Körperpotentials mit dem Flächenpotential. Chasles (und auch Thomson) befolgte dabei eine rein geometrische Methode, indem er von den Niveau- oder isothermen Flächen ausging, auf diesen Flächen sogenannte Schichten (couches) construirte, und die Wirkungen solcher Schichten mit denjenigen des Körpers selbst auf Punkte im Raume verglich. Dabei gelangte er zu Theoremen, die, was diejenigen auf Potentialtheorie bezüglichen betrifft, in den Gauss'schen Sätzen enthalten sind; einen Theil der Chasles'schen Sätze bewies Sturm auf analytischem Wege. — Von historischem Interesse ist dabei Folgendes: Chasles glaubte, dass es möglich sei, über einer gegebenen Fläche mehrere unendlich dünne Schichten so zu konstruiren, dass das Potential im Innern constant, also die Resultante der Kräfte in jedem Punkte des inneren Raumes $= 0$ wird. Gauss machte in einer Anzeige seiner „Allg. Lehrs." auf diesen Irrtum aufmerksam, Chasles selbst erkannte ihn, und Liouville zeigte hierauf nach der von Gauss angewendeten Methode, dass selbst für ein System von mehreren Flächen eine Massenverteilung auf denselben, um genanntes Resultat zu erzielen, immer nur auf eine einzige Art möglich ist. Dieser Satz ist in der Elektricitäts-Lehre von grosser Wichtigkeit.[9])

Wohl durch die Untersuchungen von Green und Gauss veranlasst, suchte W. Thomson[10]) Theoreme aufzustellen über die eindeutige Existenz von Funktionen, welche gewissen Bedingungen genügen und auf einer gegebenen Fläche vorgeschriebene Werte annehmen. Durch ein dem Gauss'schen ähnliches Variationsverfahren gelangte er (1848) zu einem Satze, den Maxwell: „Thomson's Theorem" nennt, er selbst ihn aber als „Ausdehung des Green'schen Satzes" bezeichnet und (Nat. phil. Appendix A. [1867]) so ausspricht: „Wenn der Wert der Funktion U in jedem Punkte irgend einer geschlossenen Oberfläche gegeben ist, so bestimmt die Gleichung $\Delta U = 0$ den Wert dieser Funktion unzweideutig für jeden innerhalb der Oberfläche gelegenen Punkt." Dieser Satz ist nichts anderes, als das in Deutschland unter dem Namen „Dirichlet'sches Prinzip" bekannte Theorem, wahrscheinlich weil es durch Dirichlet in seinen Vorlesungen bekannter gemacht und bewiesen wurde, findet sich aber, wie bemerkt, schon 1848 bei Thomson, sogar in einer weiteren Fassung (s. Anm. 10). Den Namen „Dirichlet'sches Prinzip" gab ihm Riemann (1857), der aber nur Wortlaut und Beweis in Umformung für zwei Variable (in der Ebene) mitteilte; in der Form, wie er jetzt für drei Variable in den von Grube 1876 herausgegebenen Dirichlet'schen Vorlesungen aus dem Jahre 1856—57, S. 126—130 sich vorfindet, wurde er zuerst von Natani 1866 publicirt. Dirichlet selbst hat nichts darüber veröffentlicht.[11]) — Sowohl bei Thomson (1867) als bei Dirichlet beruht der Nerv der ganzen Beweisführung in dem Existenznachweise eines Minimumwertes des Raum-Integrals:

$Q = \int\int\int \left[\left(\frac{dU}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dU}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dU}{dz}\right)^2 \right] dx\, dy\, dz$, welcher dadurch geliefert wird, dass man U variiren lässt und die dadurch erhaltenen Integrale auf ihre Vorzeichen untersucht.

Die Wichtigkeit des Theorems wurde sogleich von Thomson erkannt, er benutzte es (1867) Nat. phil. 499 zum Beweise des „Green'schen Problems" (s. S. 28) und ausserdem öfters; Dirichlet wendete es an zur Begründung des Gauss'schen Satzes über Ersetzbarkeit einer körperlichen Massenverteilung durch eine Oberflächen-Belegung, und Riemann zum Existenznachweise der Green'schen Funktion[12]. Es würde in vielen Gebieten eine noch erhöhtere Bedeutung gewinnen, wenn ein völlig einwurfsfreier Beweis desselben gegeben werden könnte, was bis jetzt aber noch nicht gelungen ist. Kronecker und Weierstrass[13]) äusserten Bedenken bei dem Dirichlet'schen Beweisgange (die auch die entsprechenden Gauss'schen Deductionen treffen) über die Annahme, dass ein Minimum existiren müsse, sowie über die Anwendung der Variationsmethoden. Heine[14]) prüfte unter anderen Voraussetzungen, die beim Beweise des Dirichlet'schen Princips gemacht werden, die Voraussetzung der Fortsetzbarkeit der Funktion U_n in den inneren Raum und zeigte, dass sie nicht immer, aber doch bei dem Körperpotential und der Green'schen Funktion (s. u.) berechtigt ist.

Die von C. Neumann gegen die Deductionen von Green, Gauss und Dirichlet erhobenen Einwände richten sich ausserdem noch hauptsächlich gegen die Benutzung unbekannter Flächen als eines Operationsmittels. Neumann suchte deshalb die früheren Argumentationen durch andere zu ersetzen, welche von diesen Übelständen frei sind. Aus den Sätzen über die extremen Werte des Potentials und dem erweiterten Gauss'schen Mittelwertsatze leitete er die den Green'schen und Gauss'schen entsprechenden Haupttheoreme ab (N. bezeichnet sie mit $A^{ad,l}$, A^{ad}, J^{ds}), gab ihnen vermöge dieser Ableitung aber eine Fassung in der sie nur aussagen, dass gewisse Funktionen durch die ihnen auferlegten Bedingungen eindeutig bestimmt sind, ohne jedoch irgend welchen Aufschluss über die wirkliche Existenz dieser Funktionen zu geben. Über Wortlaut und Beweise der Theoreme muss auf die unübertreffliche Neumann'sche Darstellung verwiesen werden.[15]) — Neumann kennzeichnet seinen Standpunkt durch folgende Worte: „Es wird heutzutage kein Zweifel darüber obwalten, dass die von Gauss und Dirichlet zur Beseitigung dieses Übelstandes (betreffs des Existenzbeweises) angegebenen Variationsmethoden im Allgemeinen wenig Zutrauen verdienen, dass vielmehr die einzig strenge Methode zur Beseitigung des genannten Übelstandes in der wirklichen Aufstellung jener Funktionen besteht" (Math. Ann. XIII, S. 271).

Wegen der an dem sog. Dirichlet'schen Principe gemachten Ausstellungen wurde auch von Anderen vermieden, in der Potentialtheorie von ihm Gebrauch zu machen, so von Bruns, Betti u. A.; man sah sich nach neuen Wegen um, die sicherer zum Ziele führen könnten, ward aber bald genöthigt die Untersuchung in ihrer grossen Allgemeinheit fallen zu lassen und sich auf gewisse begrenzte Gebiete zu beschränken. Dabei tritt besonders folgender Umstand hervor. Während man früher nach dem Vorgange Cauchy's von einem allgemeinen Funktionsbegriffe ausgegangen war und diesen durch gewisse Forderungen beschränkte, trat jetzt mehr die Weierstrass'sche Methode in den Vordergrund (namentlich bei dessen Schülern Bruns, W. Stahl u. A., auch bei Heine und C. Neumann), nämlich sich nur mit solchen Funktionen zu beschäftigen, welche eine Darstellung durch Potenz-Reihen zulassen, aus deren Entwicklung dann Schlüsse auf die Eigenschaften jener Funktionen gezogen werden können.[16])

Bei den bisher angeführten allgemeinen Sätzen wurde früher stillschweigend oder auch ausdrücklich die Voraussetzung gemacht, dass die auf der Fläche gegebene Funktion daselbst überall stetig sei. C. Neumann[17]) untersuchte zum ersten male in ausführlicher Weise, ob die Potentialfunktion in einem Gebiete auch dann noch eindeutig bestimmt sei, wenn ihr Wert auf der Grenzfläche dieses Gebietes mit Discontinuitäten behaftet ist, und erweiterte durch diese Untersuchungen wesentlich die allgemeine Theorie des Potentials. Als Resultat ergab sich Neumann, dass in der That die Potentialfunktion eines Gebietes durch Angabe ihrer Grenzwerte eindeutig bestimmt ist, vorausgesetzt, dass diese keine anderen Unstetigkeiten haben als solche, die in einzelnen Differenzpunkten bestehen und man für diese Punkte leicht angebbare „accessorische" Bedingungen hinzufügt. Ist man ferner im Besitze einer Methode zur Bildung der Potentialfunktionen eines Gebietes für vorgeschriebene stetige Grenzwerte, so ist man im Stande, diese Funktionen auch für solche Grenzwerthe zu bilden, welche auf der Fläche in einzelnen Punkten mit endlichen Differenzen behaftet sind.

---

[1]) Man vergl. namentlich Einkleidung und Beweis dieses Theorems bei Somoff, Mechanik II S. 247. — Ferner Clausius, § 44 und 47 — Maxwell, El. 97 a.

[2]) Ueber diesen Green'schen Satz und über das dabei angewendete Raisonnement s. Clausius, Pot. § 44 u. 45. — Maxwell, Elec. 97 b.; Riemann-Hatt. § 34.

[3]) Beer, Einleitung etc. S. 16—18. — Clausius, Pot. § 43. — Kirchhoff, Vorl. S. 185. — Somoff, Mechanik II S. 151. — Das Integral $\int\left(V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n}\right) d\sigma$ hat bestimmte charakteristische Werte je nach der

Lage der V erzeugenden Massen und der Lage des Punktes, worauf sich $\frac{1}{r}$ bezieht; es sei, da es bei verschiedenen Untersuchungen auftritt, auf die Formeln verwiesen, wie sie etwa Neumann, Unters. S. 19—21. Formel 40, 41, 42 je δ und ε aufstellt. Neumann bediente sich häufig dieser Formeln; s. C. Neumann, „Lösung des Problems über den stationären Temperaturzustand einer homogenen Kugel" 1861, sowie „Allgemeine Lösung u. s. w." 1862, S. 16, zweites Theorem, wo sie aus der Green'schen Formel abgeleitet sind. — Um wenigstens ein Beispiel zu geben, seien folgende Formeln angeführt: Liegt die Masse des Potentials V innerhalb der Fläche σ, so ist:

$$\int\left(V^a\frac{T^i}{\partial n} - T^i\frac{V^a}{\partial n}\right)d\sigma = 0; \quad \int\left(V^a\frac{T^a}{\partial n} - T^a\frac{V^a}{\partial n}\right) = 4\pi V_a$$

unter a und i sind 2 Punkte zu verstehen, von welchen der eine ausserhalb der andere innerhalb σ liegt. T^a und T^i sind die reciproken Entfernungen dieser Punkte vom Element $d\sigma$. Liegen die Massen ausserhalb σ, so hat man nur die Buchstaben a und i zu vertauschen und für n die innere Normale zu nehmen. — In einer Notiz: „Über zwei von Green gegebene Formeln" Berichte der k. s. Ges. der Wiss. zu Leipzig 1878, S. 10—12, zeigte C. Neumann, dass wenn man statt a oder i einen Punkt s auf der Fläche selbst wählt, das Integral drei verschiedene Werte hat, einen auf ihrer äussern Seite, einen direkt auf der Fläche und einen dritten auf der innern Seite: $U_{is} = 0$, $U_s = 2\pi V_s$ $U_{as} = 4\pi V_s$, wenn das Integral mit U bezeichnet wird. Im Falle des Vorhandenseins von Ecken und Kanten erleiden diese Formeln einige Aenderungen.

[4]) Mathieu, Reflexions au sujet d'un théorème d'un mémoir de Gauss sur le potentiel. Borch. J. Bd. 85. S. 264–269.

[5]) Gauss, Intensitas vis magneticae. 1833. art. 2 S. 10; Werke Bd. V S. 87; „Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus" 1839. art. 20.

[6]) Thomson and Tait, Nat. phil. 503 — Dirichlet-Grube § 36. — Heine, Handbuch der Kugelf. II S. 67—69. — Kötteritzsch, Elektrostatik. Cap. I § 11 stellt, um zu dem Satze zu gelangen, ein eigenthümliches, nicht immer stichhaltiges Raisonnement an.

[7]) Thomson and Tait, Nat. phil. 505—512. Von den daselbst gegebenen Beispielen rührt das erste (gleichförmiger Stab) von Green her. — S. auch Somoff, Mechanik II S. 249—255.

[8]) Die hieher gehörigen Abhandlungen Chasles' sind folgende: Im Jahre 1837 veröffentlichte er zwei die Anziehung des Ellipsoids betreffende Arbeiten: Mémoire sur l'attraction des ellipsoïdes; und Mémoire sur l'attraction d'une couche ellipsoïdale infiniment mince, et les rapports qui ont lieu entre cette attraction et les lois de la chaleur dans un corps en équilibre de température. Journ. de l'École polytechnique. T. XV. 1837. p. 244—265 und 266—316. In letzterer Abhandlung § 5 S. 304—316 wies Chasles darauf hin, dass die für ellipsoidische Schichten gewonnenen Sätze sich auf Niveauschichten von irgend welcher anderen Form übertragen lassen. Die wirkliche Ausführung gab er 1842: Théorèmes généraux sur l'attraction des corps et la théorie de la chaleur. Conn. des Tems pour 1845. Additions p. 18—33, nachdem er eine kurze Notiz 1839 in Comptes rendus de l'Acad. t. VIII p. 209 vorausgehen liess, in welcher er sein Haupttheorem mitteilte. — Eine Reproduktion der Chasles'schen Sätze und Beweise geben Moigno, Méc. analyt. p. 499—537 und Kötteritzsch, Elektrostatik. Cap. III § 1 u. 3. — Die Chasles'schen Sätze behandelten ferner Sturm, Note sur un mémoire de M. Chasles. Liouv. J. VII. 1842. p. 345—355; u. Despeyrous, Recherches sur les surfaces isothermes et sur l'attraction des ellipsoïdes. Crelle J. Bd. 31. 1846. S. 136—166.

W. Thomson fand einen Teil der Sätze durch die gleiche Methode wie Chasles in: On the uniform motion of heat etc. Cambr. Math. J. 1842. Phil. Mag. 1854 oder Reprint etc. p. 1 –14; s. hier besonders die Note p. 1 und p. 131.

[9]) Wegen des Irrtums von Chasles s. Gauss in Gött. gel. Anzeigen 1840 oder Werke V S. 305—308; ferner Chasles in Conn. d. T. pour 1845, p. 22, Fussnote. Die Note von Liouville: Note à l'occasion du mémoire de M. Gauss. Conn. d. T. pour 1845. p. 34—36 beschäftigt sich mit dem Satze, dass immer ein und nur ein elektrisches Gleichgewicht selbst bei einem System von Flächen vorhanden ist. Mit dem Nachweise dieses Satzes beschäftigen sich auch, gestützt auf Sätze der Potentialtheorie: Urbansky, Theorie des Potentials u. s. w. 1865; Dirichlet-Grube § 37, Volpicelli, Della distribuzione elettrica sui conduttori isolati, Ann. di Mat. III. 1870. p. 249—268. S. auch Thomson, Propositions in the theory of attraction, Cambr. Math. J. 1843, oder Reprint, p. 137 —. Über die Art der Verteilung der Elektricität (monogen oder amphigen) bei einem Systeme von Leitern, die sich gegenseitig influenciren, stellte C. Neumann, Unters. über das Potential, Cap. III eine Reihe sehr bemerkenswerter Sätze auf.

[10]) W. Thomson, Theorems with reference to the solution of certain partial differential equations. Cambr. and Dubl. Math. J. Januar 1848. Eine französische Übersetzung hievon nebst Zusatz erschien in Liouville Journ. XII. 1847 p. 493—496; abgedruckt in Reprint. etc. p. 139—143. Der Satz hat bei Thomson folgenden Wortlaut: „Theorem 1: It is possible to find a function V of x, y, z, which shall satisfy, for all real values of these variables, the differential equation:

$$\text{(A)} \qquad \frac{d\left(\alpha^2 \frac{dV}{dx}\right)}{dx} + \frac{d\left(\alpha^2 \frac{dV}{dy}\right)}{dy} + \frac{d\left(\alpha^2 \frac{dV}{dz}\right)}{dz} = -4\pi\varrho$$

α being any real continuous or discontinuous function of x, y, z, and ϱ a function which vanishes for all values of x, y, z, exceeding certain finite limits (such as may be represented geometrically by a finite closed surface), within which its value is finite, but entirely arbitrary. Theorem 2: There cannot be two different solutions of equation (A) for all real values of the variables". — S. auch Thomson and Tait, Nat. phil. Appendix A, und Maxwell El. 100, welcher dem Theoreme eine noch allgemeinere, aber sehr unübersichtliche Fassung giebt.

[11]) Riemann, Theorie der Abel'schen Funktionen. Borch. J. Bd. 54 1857, oder gesammelte math. Werke S. 90: „ein Prinzip, welches Dirichlet . . . seit einer Reihe von Jahren in seinen Vorlesungen . . . zu geben pflegt." Der Name „Dirichlet'sches Prinzip" kommt dann öfters in der citirten Abhandlung vor. — Natani, Mathematisches Wörterbuch Bd. V. 1866 S. 602—606. Der Satz lautet dort: „Eine Funktion u ist völlig definirt für einen gegebenen begrenzten Raum, wenn sie 1) auf der ganzen Begrenzung einen gegebenen continuirlichen Wert hat: $u = f(x, y, z)$; 2) innerhalb des ganzen Raumes continuirlich ist und 3) daselbst der Gleichung $\Delta u = 0$ genügt." Natani giebt den Beweis „nach seinem Erfinder Dirichlet" genau so, wie er sich bei Dirichlet-Grube S. 126—130, Riem.-Hatt. § 34 und Clausius, Pot. § 46 vorfindet.

[12]) Thomson, Theorems etc. Reprint p. 141: The analysis . . . possesses very important applications in the theories of heat, electricity, magnetism, and hydrodynamics . . . — Die Anwendungen durch Dirichlet in Vorles. § 33—35; von Riemann in Riem.-Hatt. § 34.

[13]) Kronecker und Weierstrass selbst haben Nichts hierüber veröffentlicht, man sehe aber Heine: Über trigonometrische Reihen. Borch. J. Bd. 71. 1870. S. 360: „Bekanntlich haben die Herren Kronecker und Weierstrass schon vor längerer Zeit ihre Bedenken über die Annahme geäussert, dass ein Minimum existiren müsse, sowie auch über die Anwendung der Variationsrechnung." Ferner Bruns: De proprietate quadam functionis potentialis corporum homogeneorum. Dissert. Berlin 1871. p. 12: „Vir Ill. Weierstrass in lectionibus de functionum theoria habitis animadvertere solet, fundamentum, quo tota ratiocinatio nostra potissimum nititur, non ita stabilitum ac confirmatum

existimari debere, ut ei theorema tam generale, quam illud de solidis aequipotentialibus, merito superstruatur. Nervus enim demonstrationum, quibus primum Ill. Gauss, tum autem praecipue Ill. Dirichlet hanc theoriam fundamentalem adversus omnem dubitationem munire arbitrabantur, in eo potissimum collocatus est, ut per se clarum esse affirmetur, expressionem quandam, puta integrale definitum:

$$\int (V - 2U)\, m\, ds \quad vel \quad \int \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 \right] dx\, dy\, dz$$

valorem minimum attingere debere. Jam vero ejus modi integrale valorem minimum re vera attingere omnino non necesse est . . .“

[14]) Heine l. c. Borch. J. Bd. 71 S. 360; ferner: Über einige Voraussetzungen beim Beweise des Dirichlet'schen Prinzips. Gött. Nachr. 1871 S. 375—382 od. Math. Ann. IV. 1871 S. 626—632. Heine zeigte, dass, wenn eine Fortsetzung von V durch die Fläche in den innern Raum existirt, es unendlich viele solcher Fortsetzungen giebt, die den gleichen Bedingungen der Endlichkeit und Stetigkeit genügen. S. auch Heine, Kugelf. II. S. 66. — Cayley: Note on a point in the theory of attraction. Proceedings of the London Mat. Soc. VI. 1875 p. 79—81 erörtert ebenfalls die Mehrdeutigkeit des Flächenpotentials, die eintritt, wenn V durch die Fläche hindurch fortgesetzt wird.

[15]) C. Neumann, Unters. über das Potential. 1877. p. 35—42; Cap. III. § 8. S. 101—107; zusammengestellt Math. Ann. XIII. S. 260. In den Unters. sind auch entsprechende Theoreme für einen schalenförmigen Raum aufgestellt. S. 43, 46—47. — Über die Bedenken gegen Green, Gauss etc. s. besonders das „Vorwort“ zu den Unters. und S. 112 „Schlussbemerkung“.

[16]) So sagt Betti im Vorwort zu „Teorica delle forze Newtoniane etc. 1879 p. V.: „Nella teorica publicata nel Nuovo Cimento“ (Vorträge, die Betti 1863—64 in Pisa hielt, publicirte er in der Zeitschrift N. Cim. Bd. 18, 19, 20 und gab sie dann gesammelt unter dem Titel: „Teorica delle forze che agiscono secondo la legge di Newton“, Pisa 1865, heraus) aveva fondato i metodi della Elletrostatica sopra il teorema Dirichlet-Riemann . . . Dopo le osservazioni critiche fatte sopra la dimostrazioni di quel teorema in tutta la sua generalità, io ho creduto conveniente di abbandonare quei metodi. Ci petremo fondare nuovamente sopra quel teorema quando saranno rigorosamente determinati i limiti tra i quali sussiste.“ — H. Bruns, l. c. Anm. 13: „. . . Etenim defectus ille non aliter evitare posse videtur, quam si functionem quaesitam signis analyticis explicite enodare contingit.“ — S. ferner Bruns in Borch. J. Bd. 81. S. 349—356; Stahl, ib. Bd. 79. S. 265—303.

[17]) C. Neumann, Untersuchungen Cap. VIII. „Theorie der kanonischen Potentialfunktion“ (s. auch Math. Ann. XIII. S. 294); die Definition des letzteren Ausdrucks s. S. 282 der Unters.

§ 10.

Aequipotentielle Massenverteilung. — Potentialflächen.

Die oben (S. 31) erwähnten Sätze von Gauss und Chasles sagen im Wesentlichen aus, es lasse sich für eine gegebene Masse eine andere substituiren mit dem Erfolge, dass die von beiden herrührenden Potentiale in ein und demselben beliebigen Punkte eines gewissen Raumes einander gleich sind. Dieser Satz war für einen speciellen Fall, nämlich für das Ellipsoid, schon früher bekannt unter dem Namen „Ivory'sches Reductionstheorem“ (1809), welches besagt, dass zu einem

gegebenen Ellipsoide sich ein anderes mit ihm confocales so construiren lasse, dass beide in Bezug auf einen äusseren Punkt dasselbe Potential besitzen. Todhunter wies nach, dass bereits Laplace 1783 zu gleichem Resultate gelangte und gab ihm daher den Namen „Laplaces Theorem"; Ivory's Verdienst besteht nur darin, einen klaren und strengen Beweis mit Hilfe der von ihm eingeführten „correspondirenden Punkte" gegeben zu haben. Das Theorem ist eigentlich eine Verallgemeinerung des Maclaurin'schen Satzes (S. 1), daher Chasles nur stets von einem „Théorème de Maclaurin" spricht, das ihm die Veranlassung zu seinen Untersuchungen über Attraktion und zur Aufstellung seiner „Théorèmes généraux etc." gab [1]).

Zwei Massenverteilungen, die in einem Punkte das gleiche Potential hervorrufen, werden jetzt gewöhnlich als „äquipotential" bezeichnet.

Eine hervorragende Bedeutung kommt denjenigen Fällen von äquipotentieller Massenverteilung zu, in welchen erstens eine auf einer geschlossenen Fläche ausgebreitete oder von derselben eingeschlossene Masse in Punkten des äusseren Raumes dasselbe Potential hat, wie ein im Innern beliebig angenommener Massenpunkt, oder in welchen zweitens die Flächenbelegung äquipotential ist für alle inneren Punkte mit einer in einem äusseren Punkte concentrirten Masse. Es ergeben sich daraus einerseits die für Lösung von Potentialaufgaben so wichtigen Green'schen Belegungen (s. § 12), andrerseits führten sie Thomson zur Entdeckung der sog. „centrobarischen" Körper und Schichten sowie zum Nachweise ihrer Eigenschaften, ein Resultat, das Thomson „eines der überraschendsten Ergebnisse der wundervollen Green'schen Theorie und eine der merkwürdigsten und interessantesten Anwendungen derselben" nennt. [2])

Ein Fall der Äquipotentialität von soeben bezeichneter Art, betreffend die Kugelfläche, wurde mehrfach von Thomson und C. Neumann behandelt; die Resultate, zu welchen Beide gelangten, finden sich aber bereits in fertiger Form in zwei von Green aufgestellten Gleichungen [Essay 10. Gl. 10 u. 11] vor, nur hat Green unterlassen, die daraus sich ergebenden, in Rede stehenden Sätze ausdrücklich zu formuliren. Es handelt sich nämlich um folgendes Theorem: Eine Kugelfläche σ sei derart mit Masse belegt, dass die Dichtigkeit in jedem Flächenelemente $d\sigma$ dem Cubus des Abstandes eines gegebenen Punktes P von $d\sigma$ umgekehrt proportional ist. Ist P im Innern, so ist das Potential dieser Belegung auf äussere Punkte ebenso gross, als wäre die Gesammtmasse M in P vereinigt; liegt P ausserhalb, so ist das Potential der Belegung auf innere Punkte gleich dem Potential einer in P concentrirten Masse von der Dichtigkeit $\frac{MD}{R}$, wenn D die Central-Distanz des Punktes P und R der Radius der Kugelfläche ist. Zu diesem Satze gelangte Thomson (1848) durch eine rein geo-

metrische Methode, während Neumann (1861) ihn selbständig durch Interpretation einiger specialisirter Fälle der Green'schen Formel fand, und später auch die Priorität der Entdeckung Thomson zuerkannte. Wie schon bemerkt, lässt sich aber das Theorem aus 2 von Green aufgestellten Gleichungen ablesen; dies tritt noch ganz besonders deutlich hervor, wenn man die vorausgehende Green'sche Entwicklung mit dem von Neumann neuerdings in seinen „Untersuchungen" 1877 eingeschlagenen Beweisgange vergleicht, wobei eine volle Übereinstimmung evident sich herausstellt.[3])

Nach den Gauss'schen und Chasles'schen Sätzen ist es immer möglich, zu einer gegebenen körperlichen Masse eine ihr äquipotentiale Massenverteilung auf einer sie umschliessenden beliebigen Fläche für äussere Punkte zu finden. Es trat die Frage nahe, ob auch im Innern des gegebenen Körpers Flächen existiren, die dasselbe leisten, mit andern Worten, ob es möglich ist, die Funktion V_a eindeutig in das Innere des Körpers hinein fortzusetzen und zwar so, dass sie nirgend unendlich gross wird. Diese Frage wurde zuerst von Lipschitz[4]) 1861 aufgeworfen und zu beantworten versucht. Lipschitz (und dann Mertens) zeigte an dem Beispiele des Ellipsoids,[5]) dass in der That V_a sich ins Innere fortsetzen lasse, und dass die von der Fokal-Ellipse begrenzte ebene Fläche sich mit Masse so belegen lasse, dass ihr Potential gleich dem des Voll-Elipsoids für äussere Punkte ist. — Allgemein kann, nach Lipschitz, der ausserhalb der Grenzfläche S des gegebenen Körpers herrschende Wert von V in das Innere von S bis zu einer geschlossenen Fläche Ψ so fortgesetzt werden, dass V der Gleichung $\Delta V = 0$ genügt, und dass weder in V noch in seinen ersten Abgeleiteten nach x, y, z an irgend einer Stelle Unstetigkeit oder Mehrdeutigkeit vorkommt. Für die Fläche Ψ existirt eine Massenbelegung, deren Potential für die Punkte ausserhalb S mit V_a zusammenfällt und für Punkte zwischen Ψ und S mit der Fortsetzung von V_a identisch ist. Die Form der Fläche Ψ ist der Natur der Sache nach an gewisse Beschränkungen gebunden, sonst aber beliebig. Es giebt jedoch eine Bedingung, der hier nur eine Fläche genügen kann, das ist die Bedingung, dass Ψ eine nicht geschlossene Fläche sei. Es muss dann in einem solchen Falle die Fortsetzung des ausserhalb S geltenden Wertes sich in der Weise bis zu Ψ führen lassen, dass wenn man sich demselben Punkte der Fläche von entgegengesetzter Seite nähert, die Funktion in den gleichen Wert übergeht, die nach der Flächennormale genommenen Derivirten aber verschiedene Werte annehmen, deren Differenz vermöge der Gleichung: $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{-0} - \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{+0} = -4\pi\varrho$ (s. § 5) den Ausdruck der Dichtigkeit liefert. Ist eine nicht geschlossene Fläche Ψ gefunden, so lässt sich nach Lipschitz beweisen, dass ausser dieser keine zweite existiren kann, und zwar indem man analog einem Riemann'schen Verfahren (Grundlagen u. s. w. 11) zeigt, wie

die Fortsetzung der Funktion V von den angeführten Eigenschaften eine völlig bestimmte ist. — Für das Ellipsoid ergiebt sich, wie schon bemerkt, als nicht geschlossene Fläche Ψ die Fokal-Ellipse.

Nach Lipschitz, der die Sache mehr andeutete als strenge erörterte, beschäftigten sich mit diesem Gegenstande eingehender W. Stahl und H. Bruns[6]) auf Anregung ihres Lehrers Weierstrass. Stahl nannte die nichtgeschlossenen Flächen Ψ mit den erwähnten Eigenschaften: „Potentialflächen" und zeigte, dass sie eine Art Doppelflächen sind für eine mehrwertige Funktion aus folgendem Grunde: Soll die das Potential darstellende Funktion unbeschadet der Stetigkeit ihrer Differential-Quotienten durch die Fläche fortgesetzt werden, so können die Werte, welche die durch die Fläche fortgesetzte Funktion annimmt, jenseits der Fläche nicht mehr mit dem Potential übereinstimmen, da sonst eine Unstetigkeit der Derivirten stattfinden müsste. Man hat es daher hier mit einer mehrwertigen Funktion zu thun, welche an der mit Masse belegten Fläche keine weiteren Singularitäten hat als die charakteristische Eigenschaft, diese Fläche zu einer Doppelfläche zu besitzen, längs welcher zwei oder mehrere Zweige der Funktion denselben Wert annehmen; ein Zweig stellt das Potential der die Fläche erfüllenden Masse dar. Die Funktion kann aber eben dadurch einwertig gemacht werden, dass man den Durchgang durch die Fläche nicht zulässt.

Die Potentialflächen lassen sich ermitteln, wenn die Potentialfunktionen V_a und V_i des Körpers bekannt sind, wie Stahl und Bruns an mehreren Beispielen zeigten[7]); ausserdem leistet zur Aufsuchung dieser Flächen eine gewisse Funktion U wichtige Dienste, namentlich auch für solche Körper, deren Begrenzung von Stücken analytisch verschiedener Flächen gebildet ist. Dieses U ist gleich $V_a - V_i$, verschwindet sammt seinen ersten Derivirten an der Oberfläche des Körpers, und genügt der Gleichung $\Delta U = 4\pi$. Ist die Funktion U ermittelt, so lassen sich V_a und V_i mit deren Hilfe durch die Begrenzung des Körpers hindurch fortsetzen, wenn die Oberfläche in der Umgebung des zu durchschreitenden Punktes regulär ist. — Die eindeutige Existenz einer solchen Funktion U wies Bruns durch Reihen-Entwicklungen nach; auch untersuchte er das Verhalten der Funktionen U, V_a und V_i bei einer Fortsetzung durch singuläre Stellen wie Kanten, Spitzen u. s. w. Stahl stellte in einer grösseren Abhandlung 1875 mehrere allgemeine Eigenschaften der Potentialflächen auf, die sich aus den Bedingungen für U ergeben, ermittelte und discutirte die Funktion U für Flächen zweiter Ordnung und construirte hierauf die Potentialflächen für solche homogene Körper, welche von Flächen oder Flächenstücken zweiter Ordnung begrenzt sind.

Untersuchungen über äquipotentielle Massenverteilung treten uns häufig bei Behandlung von speciellen physikalischen und Potential-Problemen entgegen (s. § 13), es handelt sich dabei zum grössten Teil

um das Aufsuchen der Dichtigkeit derjenigen neuen Massenverteilung, welche die ursprüngliche ersetzen soll. Um ausser den bisher genannten speciellen Fällen noch einige zu erwähnen, seien angeführt die Untersuchungen von Lipschitz über das nicht homogene Ellipsoid, von Glaser über die nicht homogene Kugel, und diejenigen von Husmann, der auf mehr geometrisch-synthetischem Wege für einige homogene Körper (Cylinder, Kreisring, Kreisscheibe etc.) die ihnen äquipotentialen Flächen und Curven aufsuchte und die Relationen zwischen den Dichtigkeiten der entsprechenden Massen aufstellte[5]).

---

[1]) Ivory: On the attractions of homogeneous Ellipsoids. Phil. Trans 1809, p. 345—372. — Über das Ivory'sche Theorem s. man die Lehrbücher z. B. Moigno, Méc. analyt. p. 521; Somoff, Mechanik II S. 206; besonders F. Neumann, Vorlesungen über Magnetismus. 1881. S. 75—80. — Todhunter: Hist. attr. 254. 804. Chapter XXIX besonders hierin art. 1141—1143, dann 1406 bis 1412. — Paraira: Over de methoden etc. S. 57 spricht Legendre die Priorität zu. — Chasles: Rapport sur les progrès de la géométrie. 1870. p. 104 — 108, spricht den Satz so aus: „Deux ellipsoïdes homofocaux exercent sur un point extérieur des attractions qui ont la même direction et sont entre elles comme les masses des deux ellipsoïdes." Von grossem historischen Interesse sind die Bemerkungen und Citate Chasles' über seine und Anderer Arbeiten, die an das „Théorème de Maclaurin" anknüpfen: nachdem er Ivory erwähnte, fährt er fort: „Mais il restait toujours à desirer une démonstration directe et rigoureuse du théorème de Maclaurin. On était loin de croire que de simples considérations de géométrie pourraient y suffire. . . Un Mémoire dans lequel le théorème etait démontré directement dans toute sa généralité fut présenté à l'Académie (par Chasles). Comptes rendus 1837. V p. 842; inséré dans le recueil des Savants étrangers t. IX. 1846. p. 629—715 . . ." — Vrgl. ferner Grube, Zur Geschichte des Problems der Anziehung des Ellipsoids Pgr. 1883. S. 8.

[2]) Thomson and Tait: Nat. phil. 526—535, oder Thomson in Proceedings of R. S. of Edinburgh 1864 p. 190, ferner die Notizen von Liouville und Thomson aus dem J. 1846, abgedruckt in Thomson, Reprint etc. p. 108 — 111; — Legebeke: De functie van Green. Utrecht. 1879. S. 23—34.

[3]) Thomson: Geometrical investigations with reference to the distribution of electricity on spherical conductors. Cambr. a. Dubl. Math. J. 1848, oder Reprint. etc. p. 60—65; Nat. phil. 473—476. — S. auch Maxwell, Electr. 158; Somoff, Mechanik II S. 252. — C. Neumann; Lösung des allgemeinen Problems über den stationären Temperaturzustand einer homogenen Kugel ohne Hülfe von Reihen-Entwicklungen, nebst einigen Sätzen zur Theorie der Anziehung. 1861. Die hier in § 2 und 3 aufgestellten Hauptformeln (11) und (12) für U_b und V_a, aus denen die in Rede stehenden Sätze sich ergeben, sind genau die Green'schen Gleichungen (10) und (11) im Essay, art. 10; (es findet sich daher, nebenbei bemerkt, die Lösung des bei Neumann im Titel genannten Problems schon bei Green in der gleichen Form). — C. Neumann, Unters. etc. S. 62—68. Math. Ann. XIII. S. 262, Fussnote.

[4]) R. Lipschitz: Untersuchungen über die Anwendung eines Abbildungsprincips auf die Theorie der Gravitation. Borch. J. Bd. 61. 1863. S. 22—65. Einleitung und § 1.

[5]) Lipschitz, l. c. § 2. — Mertens. De functione potentiali duarum ellipsoidum homogenearum. Borch. J. Bd. 63. S. 367.

[6]) W. Stahl: Über die Reduktion von Körperpotentialen auf Flächenpotentiale. Inaugural-Abhandlung, Heidelberg. 1870. — H. Bruns: De proprietate quadam functionis potentialis corporum homogeneorum. Diss. Berlin 1871. — W. Stahl: Zur Theorie der Potentialflächen unter besonderer Rücksicht auf Körper, die von Flächen zweiter Ordnung begrenzt sind. Borch. J. Bd. 79. 1875. S. 265–303. — Vrgl. auch Kötteritzsch, Elek. I. § 11, der die nicht geschlossenen Flächen „Cardinalflächen" nennt.

[7]) Stahl gibt in der soeben zuerst citirten Abh. die Construction der Potentialfläche an für das Polyeder, die Halbkugel, den Kugelabschnitt, den Kreiscylinder, und für solche Körper, welche von beliebigen Kugel- und Ebenenstücken begrenzt sind. Bruns untersuchte § 2 und 3, die Potentialflächen für die Ringfläche und behandelte auch in § 8 das Polyeder, („Exemplum, quod. Ill. Weierstrass in seminario mathematico Berolinensi tractandum proposuit".)

[8]) Lipschitz: l. c. § 2—10. — Glaser: Ein Beitrag zur Potentialtheorie. Diss. Bonn. 1880. S. 13—22. — Husmann: Über aequipotentiale Massenverteilung. Diss. Goettingen. 1880 oder Archiv für Math. Bd. 65 S. 19—56.

§ 11.

Das Potential in der Physik.

Wie aus dem Bisherigen ersichtlich, wurde das Potential ursprünglich eingeführt, um gewisse Probleme der Physik einer eingehenderen mathematischen Behandlung zugänglicher zu machen; in diesem Sinne wurde es von Lagrange, Laplace, Poisson, Green, Gauss u. A. als ein wichtiges Hilfsmittel für die Theorie der Gravitation, der Elektricität und des Magnetismus betrachtet. Durch die Arbeiten von Green und Gauss, an welche sich diejenigen von Dirichlet, Lamé, Thomson, Christoffel u. A. anschlossen, gewann das Potential eine rein mathematische Deutung, es wurde als eine Funktion aufgefasst, welche gewissen ihr aufzuerlegenden Bedingungen zu genügen habe, und insofern wurde die Potentialtheorie ein integrirender Bestandteil der Funktionentheorie und der Theorie gewisser partieller Differentialgleichungen; die dabei zum grossen Teile beliebte physikalische Einkleidung diente eigentlich nur mehr als Hilfsmittel für die Vorstellung, zur Fixirung der Ideen. Andrerseits bildete sich aus der mathematisch-physikalischen Behandlung eine Auffassung des Potentialbegriffs von rein physikalischer Bedeutung heraus, die mit den neueren Grundanschauungen der Physik in engstem Zusammenhange steht. — Die anscheinend so verschiedenartigen Interpretationen entwickelten sich allmählig mit und auseinander; das Potential wurde in der Folge auch in andere Gebiete der Physik, als die bisher genannten, eingeführt, dabei traten eine Reihe neuerer Benennungen auf, die in der nun versuchten historischen Darstellung Erwähnung finden mögen.

Ursprünglich wurde das Wort „Potential" in dem oben § 2 angeführten Sinne gebraucht in der Theorie der Gravitation und in der Elektrostatik, man verstand darunter den Ausdruck für das

Aggregat aller wirkenden Massenteilchen, jedes dividirt durch seine Entfernung vom afficirten Punkte, ein Ausdruck, dessen Differentialquotient nach irgend einer Richtung die Componenten der Kraft in dieser Richtung lieferte. Eine solche Funktion in weiterem Sinne, welche ganz allgemein die Eigenschaft besitzt, dass ihre partiellen Abgeleiteten die Componenten einer Kraft darstellen, nannte Hamilton (1834) „force function" Kraftfunktion, welche Bezeichnung auch Jacobi beibehielt [1]). Da die bisher betrachtete specielle Funktion V nur von der Configuration eines Massensystems und nicht von einer Richtung abhängt, bei gegebener Masse also nur von der Lage des afficirten Punktes, so gehört sie zur Classe derjenigen Funktionen, welche Lamé und nach ihm Somoff „fonctions de point", Punktfunktionen nannte und die Maxwell mit einem der Quaternionentheorie entnommenen Ausdruck „scalar quantity" belegte [2]).

Dadurch dass man die Funktion $V = f(x, y, z)$ einer Constanten C gleich setzte, erhielt man die Gleichung einer Fläche, welche für die physikalische Interpretation des Potentials von grosser Bedeutung wurde. Bezeichnet nämlich P die ganze in dem Punkte (x, y, z) stattfindende Kraft, ist ferner ds das Element einer beliebigen Linie und Θ der Winkel, den ds mit der Richtung von P macht, so ist $\frac{dV}{ds} = P\cos\Theta$; ist nun $V = C$ und liegt ds in dieser Fläche, so ist $\frac{dV}{ds} = 0$ also $\cos\Theta = 0$, woraus man schliesst, dass die resultirende Kraft in jedem Punkte einer solchen Fläche gegen diese normal und nach der Seite der wachsenden Werthe von V hin gerichtet ist. Durch jeden Punkt des Raumes lässt sich eine solche Fläche legen; zwischen 2 aufeinander folgenden Flächen ist an den verschiedenen Stellen des Zwischenraumes die Intensität der Kraft der Entfernung beider Flächen von einander umgekehrt proportional. Durchschneidet eine Linie s alle diese Flächen unter rechten Winkeln, so stellt die Tangente an s überall die Richtung der Kraft und $\frac{dV}{ds}$ ihre Stärke dar.

Die Einführung dieser Flächen in die Potentialtheorie in neuerer Zeit verdankt man Gauss und Chasles [3]); jedoch kommen sie bei Problemen der Hydrostatik schon bei Maclaurin 1742 als „level surfaces" und bei Clairaut 1743 als „surfaces de niveau" vor [4]), welchen Namen Chasles beibehalten hat. Auch die oben (S. 32) erwähnten „couches de niveau" von Chasles finden sich bereits bei Clairaut vor. Gauss nannte diese Flächen „Gleichgewichtsflächen", ferner findet man für sie die Benennungen: Flächen gleichen oder constanten Potentials, äquipotentielle Flächen (Maxwell), Potentialflächen (Helmholtz) [5]). Sie sind in der Theorie der Attraktion dasselbe, was diejenigen Flächen in der Wärmetheorie, die Lamé bei

seiner mathematischen Behandlung dieser Theorie einführte und ihnen den Namen „surfaces isothermes“ beilegte.

Bei weiterer Behandlung ergab sich ferner, dass die ganze, senkrecht zur Niveaufläche gerichtete Kraft ausgedrückt ist durch:

$$\frac{dV}{dn} = P = \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}};$$

diese Grösse, welche in der Physik und sonst auch häufig vorkommt, nannte Lamé (und nach ihm Somoff) „Differentialparameter erster Ordnung der Funktion V“, und definirte als solchen geradezu den in obiger Gleichung rechts stehenden Ausdruck [6]).

Die orthogonalen Trajectorien der Niveauflächen, mit welchen also nach Obigem die jeweilige Richtung der Kraft coincidirt, nennt man nach Faraday's Vorgang: „Kraftlinien“; auch führen sie in der Hydrodynamik, Wärmetheorie und Elektricitätslehre den Namen „Strom- oder Strömungs-Linien“; ein Raum, der von solchen sich stetig aneinanderschliessenden Linien gebildet wird, heisst nach Kirchhoff: Stromfaden, nach Faraday und Maxwell: Solenoid oder auch Sphondyloid; solche Räume wurden wohl zuerst von Chasles betrachtet, der sie einfach „orthogonale Canäle“ nannte.[7])

Von Lamé, Chasles und Betti[8]) wurden die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen aufgestellt für das Vorhandensein von Niveauflächen in einem durch eine gegebene Gleichung $f(x, y, z, \lambda) = 0$ repräsentirten Systeme von Flächen, und auch die Bedingungen angegeben, unter denen sich Niveauschichten bilden lassen: es zeigte sich, dass dies wesentlich von gewissen Beziehungen der beiden Differentialparameter unter sich und zu gegebenen Variabeln in f abhängt.

In der Theorie des Magnetismus bedienten sich sowohl Poisson als Green, Gauss, Thomson u. A.[9]) mit grossem Vorteile der Potentialfunktion, doch tritt dieselbe hier nicht mehr in so einfacher Gestalt auf wie in der Gravitationslehre und Elektrostatik, was seinen Grund in den Vorstellungen über die Natur des Magnetismus hat. Hier existirt nicht ein Potential in ursprünglichem Sinne, nämlich als Summe aller wirkenden Massenteilchen, jedes dividirt durch seine Entfernung von einem gegebenen Punkte, das Integral $V = \int \frac{dm}{r}$, sondern es ist hier nur mehr die Kräftefunktion, die als Potential bezeichnet wird. Jedoch lässt sich dabei diese Funktion in die Summe zweier Potentiale in ursprünglichem Sinne umsetzen, in das Potential einer fingirten Körpermasse und demjenigen einer Flächenbelegung von bestimmter Dichtigkeit, so dass hier schliesslich ebenfalls die Wirkung eines Magneten auf Punkte des leeren, nicht mit magnetischer Masse erfüllten Raumes durch die Wirkung einer gewissen idealen Massenverteilung auf der Oberfläche ersetzt werden kann.[10]) Es gelten daher

auch für den Magnetismus die bisher angeführten Sätze, wie etwa über eindeutige Bestimmung des Potentials durch die Werte auf der Oberfläche u. s. w.; selbst eine charakteristische, der Green'schen analoge Funktion (§ 12) wurde von F. Neumann aufgefunden.

In die Elektrodynamik wurde das Potential durch F. Neumann 1845 eingeführt; zwar hatte Gauss schon 1835 den von Neumann aufgestellten Potential-Ausdruck gefunden, jedoch nichts darüber veröffentlicht.[11]) Neumann (und Gauss) zeigte, dass die Componenten der Wirkung zweier Stromleiter auf einander sich als die partiellen Derivirten eines Ausdrucks W darstellen lassen. Als Potential gilt die Grösse $W = \frac{i\,i'}{2}\int\int \frac{\cos\Theta}{r}\,ds\,ds'$, worin i und i' die Intensitäten der Ströme bezeichnen, zu welchen die Leiterelemente ds resp. ds' gehören; r ist der Abstand von ds und ds', Θ der Winkel, welchen die Richtungen dieser Elemente mit einander bilden, die Integration hat sich beziehungsweise über den ganzen Umkreis des einen und andern Stromes zu erstrecken.[12]) — Schon Ampère hatte gezeigt, dass die elektrodynamischen (ponderomotorischen) Wirkungen geschlossener Ströme ersetzt werden können durch eine gewisse Verteilung fingirter magnetischer Fluida auf beliebigen von den Strömen begrenzten Flächen (magnetische Doppelflächen); Neumann übertrug nun den Begriff des Potentials auf geschlossene Ströme, indem er dafür das Potential einer solchen Fläche setzte. Das Neumann'sche Potential ist daher immer noch ein Potential in ursprünglichem Sinne, wenn auch auf Umwegen erhalten, was ja bei dem magnetischen Potential ebenfalls der Fall ist. Dieses Neumann'sche Potential nannte Clausius das magnetische Potential geschlossener elektrischer Ströme, im Gegensatze zu dem wirklichen elektrodynamischen Potential, welches nicht nur die Coordinaten, sondern auch die Geschwindigkeits-Componenten der Elektricitätsteilchen enthält, und aus welchem daher die Kraftcomponenten in anderer Weise als bisher abzuleiten sind.[13]) Die verschiedenen Auffassungen hiebei stehen in engstem Zusammenhange mit den elektrodynamischen Grundgesetzen von Weber, Riemann, Clausius, dem Helmholtz'schen Potentialgesetz u. s. w., welche in dem letzten Jahrzehnt eine äusserst umfangreiche Litteratur hervorgerufen haben, so dass es nicht möglich ist, ohne weitläufig zu werden näher darauf einzugehen.

In die Theorie des Galvanismus wurde das Potential durch Kirchhoff[14]) 1848 eingeführt. Nach dem Ohm'schen Gesetze ist die in der Zeiteinheit durch ein Flächenelement do hindurchfliessende Elektrizitätsmenge $= K\,\frac{du}{dn}\,do$, worin K das Leitungsvermögen des Körpers und u eine Funktion ist, die bei stationärer Strömung nur von den Coordinaten abhängt. Ohm nannte dieses u die „elektroskopische Kraft" und definirte sie als die Dichtigkeit der Elektricitäts-

menge an der betreffenden Stelle des Leiters. Kirchhoff zeigte, dass dieses u nichts anderes ist, als die Potentialfunktion V der gesammten freien Elektricität, die sich bei stationärer Strömung nach elektrostatischen Gesetzen auf der Oberfläche der Leiter anordnet; im ganzen Innern des Leiters gilt die Relation $\Delta V = 0$.

Ein vollständige Analogie besteht zwischen den Ausdrücken, die bei Betrachtung stationärer elektrischer Strömungen in Leitern hier auftreten und denjenigen, welche für die stationäre Wärme-Bewegung in festen homogenen Körpern bereits von Fourier 1807 und 1811 gefunden wurden. Nach Fourier ist die Temperatur v in einem Punkte eines Körpers abhängig von den Coordinaten (x, y, z) dieses Punktes und der Zeit t, also $v = f(x, y, z, t)$; die während der Zeiteinheit durch ein Flächenelement $d\omega$ strömende Wärmemenge ist $K \frac{dv}{dn} d\omega$, worin K, der sog. Leitungscoëfficient, von der Beschaffenheit des Körpers abhängig ist. Die Temperatur zur Zeit t im Punkte (x, y, z) im Innern erfüllt die partielle Differentialgleichung $\frac{dv}{dt} = a^2 \Delta v$, worin a eine gewisse Constante; ist die Wärmebewegung stationär, so ergiebt sich hiefür, da dann die Temperatur von der Zeit unabhängig ist, die Gleichung $\Delta v = 0$. Wird die Oberfläche des Körpers in constanter Temperatur erhalten, die selbst an verschiedenen Stellen verschieden sein kann, so ist durch die gestellten Bedingungen die Temperatur in jedem Punkte im Innern eindeutig bestimmt. Die durch Fourier begründete sogenannte analytische Theorie der Wärme wurde hauptsächlich von Poisson und Lamé[15]) weiter ausgebildet, in deren Arbeiten die grosse Analogie zwischen der Temperaturfunktion v und der Potentialfunktion V immer deutlicher hervortrat, und auf die Lamé auch an mehreren Stellen aufmerksam machte. Von den von Lamé eingeführten isothermen Flächen und Strömungslinien, die den Niveauflächen und Kraftlinien entsprechen, war schon oben die Rede. In Anlehnung an die Theorie der Wärmeverbreitung nannte Lamé eine Funktion der Coordinaten, welche für jeden Punkt eines gegebenen Volumens ihren Differentialparameter zweiter Ordnung zu Null macht, eine „thermometrische Funktion", welcher Bezeichnung sich auch Somoff anschloss. — Die mathematische Analogie zwischen den Funktionen v und V wird trotz ihrer verschiedenen physikalischen Bedeutung eine vollständige, wenn man berücksichtigt, dass bei Problemen der elektrischen Verteilung, des Magnetismus, des stationären Temperaturzustandes und der Attraktion (für äussere Punkte) es sich im Wesentlichen immer um ein und dieselbe Aufgabe handelt, nämlich um das Aufsuchen einer Funktion V, welche der Gleichung $\Delta V = 0$ genügt, gewisse Stetigkeitsbedingungen erfüllt, und an einer gegebenen Fläche daselbst vorgeschriebene Werte annimmt.

Auch zur Behandlung von Problemen der Hydrostatik und Hydrodynamik wurde das Potential angewendet von Green, Poisson, Thomson, Helmholtz, Kirchhoff u. A.[16]. Helmholtz führte hier 1858 das Geschwindigkeits-Potential ein, eine Funktion, deren Differentialquotienten nach drei rechtwinkligen Coordinatenaxen genommen die drei entsprechenden Componenten der Geschwindigkeit geben. Sie ist, ebenso wie das elektrodynamische Potential, eine mehrdeutige Potentialfunktion, während die anderen bisher genannten eindeutig sind. Von Helmholtz und Kirchhoff[17]) wurden ferner wichtige Sätze der Potentialtheorie in die Akustik übertragen und mit grossem Nutzen angewendet; eine weitere Verwendung fand die Theorie in der Lehre von der Elasticität bei Kirchhoff, Mathieu, Wangerin, Moigno[18]) in ausgedehntem Masse, sowie selbst in der Optik von v. Bezold[19]). Überhaupt wird gerade durch die Potentialtheorie eine mathematische Verwandtschaft zwischen verschiedenen Klassen von Naturerscheinungen hergestellt, wie dies Helmholtz sehr treffend an mehreren Beispielen ausführte. (Borch. J. Bd. 55).

Die Auffassung des Potentials als eines rein physikalischen Begriffes von fundamentaler Bedeutung, in engstem Zusammenhange stehend mit dem Satze von der Erhaltung der Kraft und der Arbeit, wurde durch Helmholtz 1847 in der Schrift: „Über die Erhaltung der Kraft" angebahnt und für mehrere Gebiete der Physik weiter ausgeführt. Helmholtz gelangte dazu in folgender Weise. Nachdem er die jetzt allgemein bekannte, das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft ausdrückende Gleichung $\frac{1}{2}mc_R^2 - \frac{1}{2}mc_r^2 = \int_r^R q\,dr$ abgeleitet hatte, bemerkte er hierüber (l. c. S. 14): „Nennen wir die Kräfte, welche den Punkt m zu bewegen streben, Spannkräfte, so würden wir die Grösse $\int_r^R q\,dr$ als die Summe der Spannkräfte zwischen den Entfernungen R und r bezeichnen können und das obige Gesetz würde auszusprechen sein: Die Zunahme der lebendigen Kraft eines Massenpunktes bei seiner Bewegung unter dem Einfluss einer Centralkraft ist gleich der Summe der zu der betreffenden Aenderung seiner Entfernung gehörigen Spannkräfte"; und (ib. S. 38): „Sind e_1 und e_2 zwei (elektrische) Massenelemente, so ist die Intensität ihrer Centralkraft $q = -\frac{e_1 e_2}{r^2}$; der Gewinn an lebendiger Kraft, indem sie aus der Entfernung R in die r übergehn, ist: $-\int_R^r q\,dr = \frac{e_1 e_2}{R} - \frac{e_1 e_2}{r}$. Wenn sie aus der Entfernung ∞ in die r übergehen, ist derselbe $-\frac{e_1 e_2}{r}$. Bezeichnen wir letztere Grösse, die Summe der bei der Bewegung von ∞ bis

r verbrauchten Spannkräfte und gewonnenen lebendigen Kräfte, gemäss der Bezeichnung, welche Gauss bei den Magnetismen angewendet hat, mit dem Namen Potential der beiden Elemente für die Entfernung r, so ist die Zunahme an lebendiger Kraft bei irgend einer Bewegung gleich zu setzen dem Überschuss des Potentials am Ende des Weges über das am Anfang. Bezeichnen wir ebenso . . . die Summe der Potentiale aller Elemente eines Körpers gegen alle eines andern als das Potential der beiden Körper, so wird uns wieder der Gewinn an lebendiger Kraft durch den Unterschied der Potentiale gegeben." Da nach bekanntem Satze der Zuwachs an lebendiger Kraft gleich der Arbeit ist, welche eine Kraft an einer Masse leistet, so fliessen unmittelbar aus den angeführten Helmholtz'schen Sätzen die von Thomson, Lamé, Clausius, Maxwell, Betti u. A.[20]) gegebenen Definitionen des Potentials, die sich so aussprechen lassen: Das Potential ist die Arbeit, die verrichtet würde bei der Übertragung der Punkte eines Systems aus unendlicher Entfernung in ihre wirkliche Lage; oder in Form einer Relation: Die (während einer Bewegung) von den Kräften gethane Arbeit ist gleich der dabei eingetretenen Abnahme des Potentials, die verbrauchte Arbeit gleich der Zunahme des Potentials. An Stelle des Helmholtz'schen Ausdruckes „Summe der Spannkräfte" wird jetzt gewöhnlich der von Rankine eingeführte: „potentielle Energie" gebraucht, welche Bezeichnung auch besser den Zusammenhang mit dem Potential ausdrückt.

Den Zusammenhang zwischen Potential und Arbeit hatte Gauss[21]) schon (1839) erkannt, in einigen Sätzen, „die wegen ihrer Einfachheit und Eleganz merkwürdig sind" (Gauss), die betreffenden Formeln gegeben, ohne jedoch die Schlussfolgerungen daraus zu ziehen, wie es Helmholtz that. Gauss sprach nämlich, nachdem er die Gleichung $-\frac{dV}{ds} = P\cos\Theta$ (s. oben S. 43) abgeleitet hatte, folgendes Theorem aus: „Sind zwei Punkte P^0 und P' im Raume durch eine beliebige Linie verbunden, wovon ds ein unbestimmtes Element vorstellt, und sind V^0 und V' die Werthe von V an den Endpunkten, so ist $\int P\cos\Theta\, ds = V' - V^0$." Gauss bemerkte hiezu noch: „Aus diesem fruchtbaren Satze folgen als Corollarien: 1) Das Integral $\int P\cos\Theta\, ds$ behält einerlei Wert, auf welchem Wege man auch von P^0 nach P' übergeht, 2) ist es durch die ganze Länge irgend einer in sich zurückkehrenden Linie gleich Null." — Beachtet man, dass das Integral die auf dem Wege von P^0 nach P' geleistete Arbeit vorstellt, so ergeben sich aus diesen Gauss'schen Sätzen Theoreme, welche in der neueren Physik weittragende Bedeutung erlangt haben; auch folgt daraus die oben angeführte Definition des Potentials.

Das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kraft führt in seinen Ursprüngen auf Huyghens zurück, Johann und Daniel Bernoulli beschäftigten sich mit ihm und stellten es in den Vordergrund bei Behandlung von Problemen der Mechanik[24]). Letzterer fasste es auf als eine „aequalitas inter descensum actualem ascensumque potentialem", als eine Gleichheit zwischen dem thatsächlichen Herabfallen und dem möglichen Aufsteigen beim Fallen von Körpern. Später bezeichnete er allgemein die einem Systeme innewohnende Kraft, Arbeit zu leisten, wie etwa die Kraft in einem gehobenen Gewichte, die Spannkraft einer elastischen Feder, also die potentielle Energie, mit dem Ausdrucke „vis potentialis", welchen Ausdruck dann auch Euler gebrauchte[25]). Die Vermutung scheint nicht zu gewagt, dass Gauss in Erinnerung an die D. Bernoulli'schen Ausdrücke die Bezeichnung „Potential" wählte.

---

[1]) Hamilton in Phil. Trans. 1834. p. 247—308; Jacobi, Crelle J. Bd. 17 (1836) S. 98 und Vorlesungen über Dynamik, herausgegeben von Clebsch, 1866. — S. Clausius, Pot. § 1—4; Schell, Beweg. und Kräfte S. 245, 863 u. f.

[2]) Lamé, Leçons sur les coord. curv. Leçon 1 et 2. — Somoff, Mechanik I. Cap. VII u. f. — Maxwell, Elec. 11. „Scalar quantity do not involve direction . . . One of the most important features of Hamiltons method is the division of quantities into Scalars and Vectors"; ferner 16 und öfters.

[3]) Gauss: Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus. 1839. art. 7 und 11; ferner: Allg. Lehrs. 4. — Chasles in den oben (S. 35) citirten Abhandlungen. Conn. d. T. pour 1845. p. 19: „On n'a pas songé à considerer certaines surfaces auxquelle donne lieu cette fonction V: surfaces analogues à celles qu'on appelle, dans la théorie des fluides, surfaces de niveau, et qu'on peut appeler aussi surfaces de niveau relative à l'attraction du corps, parceque etc." Von seinen hieher gehörigen Arbeiten bemerkt Chasles, Rapport sur les progrès de la géométrie. 1870. p. 103: „C'est dans ces Mémoires que l'on a considéré pour la première fois les surfaces de niveau relative à l'attraction d'un corps, qui sont maintenant d'un usage continuel."

[4]) Maclaurin, Treatise of Fluxions. 1742. art. 640. Clairaut, Figure de la terre. 1743. p. 40—52 — Vrgl. Todh. hist. attr. 248 und 308; ferner Baltzer, Zur Geschichte des Potentials. Borch. J. Bd. 86. S. 215, nach welchem die Bedingungen für das Vorhandensein von Niveauflächen von Euler, Comment. Petrop. 1740 t. 4 p. 177 und Clairaut, Mém. de Paris 1740 p. 293 angegeben wurden.

[5]) Maxwell, Electr. 16. 46. — Helmholtz, Borch. J. Bd. 57. S. 65. — Thomson and Tait, Nat. phil. 487. 488. 491 g.

[6]) S. Somoff, Mechanik I S. 99 u. f., wo Näheres über den Zusammenhang zwischen Niveauflächen und Differential-Parameter zu finden ist.

[7]) S. Maxwell, Electr. 14. 47. 117—123; 82 führt Maxwell für „Kraftlinien" in die Theorie des Magnetismus und in die Elektrostatik „Lines of Induction" ein. — Thomson a. Tait, 489, 490. — Kirchhoff, Vorl. S. 189. — Betti, Teorica etc. Cap. I. § 23. — Chasles in den citirten Abh.

[8]) Lamé: Mémoire sur les surfaces isothermes. Liouv. J. II. 1877 p. 147—183; Leçons sur les fonctions inverses etc. § 3—5. — Chasles, Journ. de l'Ecole polyt. t. 15. p. 273. — Vrgl. Duhamel: Note sur les surfaces isothermes. Liouv. J. IV p. 63. — Betti, Teorica Cap. I § 13. — Kötteritzsch, Elektrostatik S. 57—65.

[9]) Die Poisson'schen Abhandlungen über Magnetismus erschienen in den Mém. de l'Académie de Paris. V. VI. 1821. 1822. — Green, Essay etc. 14—17 p. 83—115 der Ed. Ferrers. — Gauss, Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus. Resultate aus den Beob. des magn. Vereins 1838; Leipzig 1839. S. 1—57, oder Werke V. 119—193. — W. Thomson veröffentlichte eine Reihe von Abhandlungen seit 1849 in verschiedenen Zeitschriften; dieselben sind gesammelt und mit Zusätzen versehen wieder abgedruckt in Reprint of papers on El. and Magnetism. von p. 340 an, unter dem Titel: A mathematical theory of magnetism. — F. Neumann, Vorlesungen über die Theorie des Magnetismus. 1881. (Vorl. aus dem J. 1857). — Beer, Einleitung u. s. w. — Betti: Teorica Cap. III.

[10]) Vrgl. die citirten Schriften, besonders Thomson, Reprint p. 342 bis 375. — Neumann, Vorl. § 9 und 10. — Betti, Cap. III § 1 und 2. — Maxwell, Electr. 385. 386. — Heine, Kugelfunctionen. II S. 75—77. — S. dagegen Riem-Hatt. § 65 u. 86; Helmholtz, Erhaltung der Kraft. S. 60 u. 61, jedoch Verbesserungen hiezu in Pogg. Ann. Bd. 91. 1854. S. 241—260. bes. 256.

[11]) F. Neumann, Allgemeine Gesetze der inducirten elektrischen Ströme. Abh. der Berliner Akad. 1845. Über ein allgemeines Prinzip der mathematischen Theorie inducirter elektrischer Ströme. ib. 1847. — Gauss, Werke V. S. 610 und 613.

[12]) Vrgl. die Ableitung bei Beer, Einleitung S. 260; Stefan, Sitzungsber. der Wiener Akad. v. J. 1869; Wüllner, Experimentalphysik. IV § 91. Maxwell, Electr. 423.

[13]) Vrgl. Helmholtz, Erhaltung der Kraft. S. 64; ferner: Über Integrale der hydrodyn. Gleich. Broch. J. Bd. 55, S. 42. — Clausius, die mechanische Behandlung der Elektrizität. 1879. Abschnitt VIII und IX. — Riemann-Hatt. Abschnitt 6—8. — Clausius, Über die Anwendung des elektrodynamischen Potentials etc. Wiedemann Ann. der Physik XI. 1880. S. 604—633; besonders S. 626 und 630.

[14]) Kirchhoff: Über die Anwendbarkeit der Formeln für die Intensitäten der galvanischen Ströme etc. Pogg. Ann. Bd. 75. 1848 und: Über eine Ableitung des Ohm'schen Gesetzes, welche sich an die Theorie der Elektrostatik anschliesst. Pogg. Ann. Bd. 78. 1849. — Clausius: Über die bei einem stationären elektr. Strome in dem Leiter gethane Arbeit und erzeugte Wärme. Pogg. Ann. Bd. 87. 1852. — Vrgl. die Lehrbücher, z. B. Briot, Mechanische Wärmetheorie, Teil II. Cap. V.; Wüllner, Physik IV § 60; Riemann-Hatt. Abschnitt V. Waltenhofen, Mechanische Physik, S. 329—337.

[15]) Die erste Arbeit Fourier's hierüber war eine kurze Notiz in N. Bull. de la soc. philomat. I. 1807 p. 112; seine 1811 der Pariser Akademie eingeschickte Arbeit, die Poisson stark benutzte, blieb lange ungedruckt und wurde erst 1824 in den Mém. de l'Acad. IV p. 185—555. V (1826) p. 153—264 aufgenommen; unterdess arbeitete er seine Theorie in einem 1822 erschienenen Werke: „Théorie analytique de la chaleur" aus. — Poisson: Mémoire sur la distribution de la chaleur dans les corps solides. Journ. de l'Ecole polyt. XII 1823. p. 1—144. 249—403. Théorie math. de la chaleur. Paris 1835. Die zahlreichen Arbeiten Lamé's erschienen in den ersten Bänden von Liouville Journ. de Math., seine erste, grundlegende Abhandlung in t. II. 1837. p. 147—183: Mémoire sur les surfaces isothermes etc.; ferner erschien von ihm ausser den schon öfters erwähnten Werken: Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes et les surfaces isothermes 1857, und Leçons sur les coordonnées curvilignes et leur diverses applications 1859, noch eine Théorie analytique de la chaleur 1860.

Über die Theorie vergl. man Heine, Kugelf. I. S. 348 und II. 302 u. f.; Somoff, Mechanik II S. 122 u. f.; — Dronke, Einleitung in die analytische Theorie der Wärmeverbreitung. 1882. S. 15 u. f.

[16]) Green, Mathem. investigations concerning the law of the equilibrium of fluids etc. Transac. Cambr. 1833. Papers p. 119—183. — Helmholtz: Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen. Borch. J. Bd. 55. 1858 S. 25—55; s. besonders die allgemeinen Bemerkungen auf S. 27 und 41—43. — Thomson: On vortex motion. Trans. of Edinb. XXV. 1867. — Kirchhoff: Vorlesungen, Vorl. 15—20. Vrgl. auch Auerbach: Theoretische Hydrodynamik. 1881. S. 14. 28 u. öfters, wo die bez. Arbeiten der verschiedenen Autoren citirt sind.

[17]) Helmholtz: Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden. Borch. J. Bd. 57. 1859. S. 1—72. — Kirchhoff, Vorlesungen, Vorl. 22—24.

[18]) Kirchhoff, l. c. Vorl. 27—30. — Mathieu in mehreren Abh. im Liouvilleschen Journal. XIV. 1879. p. 378—421. XV. 1870. p. 117—153. XVI. 1872 p. 249—323. V. 1879. 5—20. — Moigno, Méc. analyt. Leçon 22. s. besonders die interessanten Bemerkungen S. 711—722. — Wangerin, Über das Problem des Gleichgewichts elastischer Rotationskörper. Archiv f. Math. und Physik. Bd. 55. 1873. S. 113—146.

[19]) v. Bezold, Einige analoge Sätze der Photometrie und Anziehungslehre. Pogg. Ann. Bd. 149 1870. S. 91—94. — Man vergl. auch Riemann, Math. Werke. (Nachlass.) S. 494—506.

[20]) Ausführliches über diese Theorie geben die Lehrbücher, z. B. Clausius, Potentialf. 2. Abschnitt. „Das Potential" S. 137—165; Riem.-Hatt. von § 36 an; Betti, Cap. I § 20. Thomson and Tait, Nat. phil. 482—486. 548 bis 550. — Schell, Mechanik, S. 242—245. besonders Teil IV, Cap. 16 u. 17. — Briot, Wärmetheorie. Teil II Cap. 3 u. f. — Waltenhofen, Mechanische Physik. S. 322. 337—343. Somoff, Mechanik II. Statik, Cap. II und III. — Vrgl. auch die Note von Moigno: Méc. analyt. p. 712.

Nach Helmholtz entwickelte die betreffenden Gleichungen Clausius: Über das mechanische Aequivalent einer elektrischen Entladung etc. Pogg. Ann. Bd. 86. 1852 (Abhandl. zur Wärmetheorie II. Abh. X). Auch Lamé erörterte in Leçons sur les coord. curv. 1859 p. 161—178 den Zusammenhang zwischen Potential und Arbeit: „le potentiel . . . donne, par son accroissement, le travail de l'attraction: propriété qui justifie l'expression de potentiel". — Die von v. Bezold: Über die physikalische Bedeutung der Potential-Funktion in der Elektricitätslehre, 1861, gegebene Deutung des Potentials S. 18 und 19 findet sich schon bei Helmholtz, Erh. d. Kraft, S. 41 und 42; v. Bezold erwähnt die Helmholtz'sche Schrift nicht. — Maxwell Electr. 69. 70: „Clausius and others have applied the term Potential to the work which would be done if two bodies or systems were removed to an infinite distance from one another. We shall follow the use of the word in recent English works, and avoid ambiguity by adopting the following definition due to Sir W. Thomson: The Potential at a point is the work . . . which must be done by an external agent in ordre to bring the unit of positive electricity from an infinite distance (or from the place where the potential is zero) to the given point." — S. auch Maxwell, Substanz und Bewegung. art. 96 und 97.

[21]) Gauss, Allg. Theorie des Erdmagnetismus. 1839. art. 6. Allg. Lehrs. 4.

[22]) Vrgl. Dühring, Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik art. 99—101. — Baltzer, Z. Geschichte des Potentials Borch. J. 86. S. 214.

[23]) D. Bernoulli: Hydrodynamica. 1738. § 18 p. 11. — „Praecipuum est conservatio virium vivarum, seu, ut ego loquor, aequalitas inter descensum actualem ascensumque potentialem: Utar hac posteriore voce, quia idem quod altera significat, sortem autem apud nonnulos Philosophos, quia vel ad solum vis vivae nomen moventur, magis benignam fortasse experietur". p. 164: „Per potentiam moventem intelligam principium illud agens, quod constitit in pondere, pressione animata aliisve hujuscemodi viribus, uti dicuntur mortuis . . ." L. Euler: Methodus inveniendi lineas curvas maximi mini mive proprietate gaudentes etc. 1744. p. 246: „Quamobrem vir celeberrimus D. Bernoulli

mihi indicasset se universam vim, quae in lamina elastica incurvata insit, una quadam formula quam vim potentialem appellat, complecti posse". Einer gütigen brieflichen Mitteilung des Herrn Prof. Dr. Günther in Ansbach entnehme ich, dass man in Bezug auf die Benennung noch einen Schritt weiter zurück gehen könnte; Hermann, welcher der Baseler Schule angehörte gleichwie D. Bernoulli und Euler, identificirt in seiner Phoronomia etc. 1716 durchaus das Wort „potentia" mit dem modernen Begriffe „Kraft"; so werden daselbst S. 10 die durch Strecken dargestellten Kräfte „sollicitationes seu potentiae" genannt.

§ 12.

Green'sche Belegung. — Green'sche Funktion. — Doppelbelegung.

Zur festeren Begründung einzelner Theoreme und zur Ableitung neuer, sowie zur Lösung von Aufgaben über das Potential wurden spezielle Massenverteilungen und davon abhängende Potentialfunktionen eingeführt, wie die Green'sche Belegung und Green'sche Funktion, die Doppelbelegung, die natürliche Belegung u. s. w.

Green zeigte (Essay 5), dass in einem Punkte p das Potential V, welches auf der Fläche σ in den daselbst vorgeschriebenen Wert $\overline{V}$ übergeht, sich ausdrücken lässt durch $V = -\int (\varrho)\, V d\sigma$; (ϱ) bezeichnet die Dichtigkeit der Belegung, welche eine im Punkte p concentrirte elektrische Masseneinheit auf den zur Erde abgeleiteten Conduktor σ inducirt. Eine durch solche Induktion hervorgerufene Anordnung des Agens nannte C. Neumann[1]: „Green'sche Belegung", und definirte als solche, ihrer Haupt-Eigenschaft wegen, eine Massenverteilung auf einer Fläche, welche für alle inneren (resp. äusseren) Punkte äquipotential ist mit einer in einem äusseren (inneren) Punkte concentrirten Masse Eins. Eine wichtige Eigenschaft derselben besteht unter anderen darin, dass ihr Potential in einem Punkte, im gleichen Raume mit dem (inducirenden) Massenpunkte gelegen, eine symmetrische Funktion der Coordinaten beider Punkte ist. Dieser Satz wurde von Green zuerst aufgestellt (Essay 6), von Ettingshausen angezweifelt aber von Kirchhoff strenge bewiesen und von Helmholtz für das Gebiet der Akustik verwerthet[2]). Da die „Green'sche Belegung" Thomson zur Entdeckung der von ihm weiter untersuchten „centrobarischen" Körper und Schichten führte, nannte er sowie Maxwell und Legebeke[3]) die in Rede stehende Massenverteilung: „centrobarische Verteilung oder Belegung", welche Bezeichnung jedoch nur dann zutreffend ist, wenn der Punkt mit der Masse Eins im Innern des von einer Fläche umschlossenen Raumes liegt.

Das Potential der Green'schen Belegung pflegt man nach dem Vorgange C. Neumann's[4]) die „Green'sche Funktion" zu nennen; man bezeichnet sie mit G_a^x, G_{ax}, $G_{(a,x)}$ und ähnlich, darin

ist a der feste Punkt, „Centralpunkt" oder „Pol" genannt, dessen Coordinaten a, b, c, und x der variable Punkt P, dessen Coordinaten x, y, z sind. Die wesentlichen Eigenschaften der Green'schen Funktion bestehen darin, dass sie in allen Punkten P desjenigen Raumes, in welchem sich der Pol a befindet, endlich und stetig ist, die Gleichung $\Delta G = 0$ erfüllt, ausserdem noch in die reciproke Entfernung des Punktes P vom Pole, in $T_{(x,y,z)}$ übergeht, wenn ersterer auf die Begrenzung des Raumes rückt. Als Ausdruck für die Dichtigkeit der Masse, mit welcher die Begrenzung zu belegen ist um die Wirkung des Pols zu ersetzen, findet man: $(\varrho) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n}(T - G)$. Ist die Grösse (ϱ) bekannt, so lässt sich mit ihr die allgemeine Aufgabe lösen: die Potentialfunktion zu finden, wenn ihr auf der Fläche angegebener Wert $\overline{V}$ eine beliebige Funktion der Coordinaten ist, denn nach Green (Essay 5) ist $V = -\int (\varrho)\overline{V}\, d\sigma$; hierin liegt die grosse Bedeutung der Green'schen Funktion, da die allgemeine Potentialaufgabe durch sie auf eine speciellere reducirt und dadurch ein Weg zur Lösung ersterer gezeigt wird. Das wirkliche Aufsuchen der Green'schen Funktion ist jedoch immerhin noch sehr complicirt, ausserdem muss sie, wenn mit ihrer Hilfe das allgemeinere Problem gelöst werden soll, für jede Lage des Poles bekannt sein, dadurch wird natürlich ihre Anwendbarkeit erschwert und öfters in Frage gestellt.

Mit dem Namen „Green'sche Funktion" belegte Riemann[5]) eine andere Grösse, nämlich die bei Green vorkommende Hilfsfunktion U (oben S. 29). Dieselbe nimmt an der Oberfläche überall den Wert Null an und wird im Pole unendlich wie der reciproke Wert der Entfernung von diesem Punkte, ihr Zusammenhang mit der Funktion G wird demnach durch die Relation $U = G(a, x) - T(a, x)$ vermittelt.

F. Neumann[6]) führte eine der Green'sche analoge, ebenfalls lediglich von der Beschaffenheit einer Fläche abhängende, charakteristische Funktion ein, welche bei der magnetischen Induktion eine ähnliche Rolle spielt, wie die Green'sche Funktion bei der elektrischen Induktion, resp. bei Problemen des stationären Temperaturzustandes. Lipschitz führte ferner in die Elektrodynamik eine der Green'schen analoge Funktion ein, von der sogleich die Rede sein wird.

Specielle Fälle Green'scher Belegungen nahm C. Neumann[7]) zum Ausgangspunkte wichtiger Untersuchungen über das Potential. Diejenige Belegung einer geschlossenen Fläche σ, deren Potential in allen Punkten innerhalb σ einen konstanten Wert hat und deren Gesammtmasse gleich Eins ist, nannte er die „natürliche Belegung" von σ: mit dem Namen „Nullbelegung" bezeichnete er eine solche, deren Gesammtmasse Null und welche für alle inneren (oder auf der Fläche gelegenen) Punkte, abgesehen von einer additiven Constanten,

aequipotential ist mit einer in einem äusseren (resp. inneren) Punkte concentrirten Masse Eins.

Zur Einführung anderer spezieller Massenverteilungen auf Flächen, der sogenannten „Doppelbelegungen“ oder „Doppelschichten“, wurde man veranlasst durch die in mehreren Gebieten der Physik, besonders in der Elektrodynamik auftretende Forderung: eine Pontentialfunktion aufzustellen, welche an beiden Seiten einer Fläche verschiedene Werte besitzt, und welche nicht selbst, sondern ihr Differentialquotient nach der Normale, auf der Fläche daselbst vorgeschriebene Werte annimmt. Helmholtz[8]) war der Erste (1853), der sich der Doppelschichten und ihrer Potentiale bediente, auf ihre Bedeutung und Verwertung aufmerksam machte, und die Construktion der Schichten in folgender Weise angab: „Denken wir uns eine Fläche auf einer Seite mit positiver Elektricität, auf der andern mit einer gleichen Quantität negativer belegt, beide Schichten in verschwindend kleiner Entfernung von einander, so werden die Differentialquotienten der Potentialfunktion auf beiden Seiten der belegten Fläche gleich, die Werte dieser Funktion selbst aber verschieden sein.“ — „Nehmen wir die gleichzeitige Existenz von zwei Schichten an, eine von der Dichtigkeit $+ \varkappa$ in der Entfernung $+ \varepsilon$, die andere von der Dichtigkeit $- \varkappa$ in der Entfernung $- \varepsilon$ von der Fläche, so wird, mit Weglassung der unendlich kleinen Glieder höherer Ordnung, die Differenz des Potentials U zu beiden Seiten $U_1 - U_2 = 8 \pi \varkappa \varepsilon = 4 \pi m$, wenn wir nach Analogie der Magneten die Grösse $2 \varepsilon \varkappa = m$ das elektrische Moment der Flächeneinheit nennen.“ Was hier Helmholtz bei Annahme elektrischer Massen ausführte, wurde von Anderen (C. Neumann, Betti, Kirchhoff) auf beliebige Massen übertragen; die von Helmholtz vorgeschlagene Benennung „Doppelschicht“ wurde beibehalten oder auch dafür das Wort „Doppelbelegung“ gebraucht, auch der Ausdruck „Moment“ der Doppelbelegung wird in obigem Sinne angewendet. Aus der Definition der Doppelbelegung ergiebt sich, dass die zur Belegung verwendete Gesammtmasse gleich Null ist. Ihr Potential in einem beliebigen Punkte x (mit den Coordinaten x, y, z) hat die Formen:

$$W = \int \mu \frac{\partial \frac{1}{E}}{\partial n} d\sigma = \int \mu \frac{\cos \vartheta \, d\sigma}{E^2} = \int \mu \, (d\sigma)_x.$$

Darin bezeichnet μ das Moment, E die Entfernung des Punktes x vom Flächenelemente $d\sigma$, ϑ den von der Linie E und der Normale n gebildeten Winkel; $(d\sigma)_x$ ist die mit $+1$ oder -1 multiplicirte scheinbare Grösse des Elements $d\sigma$ für einen in x befindlichen Beobachter. Von dem Potentiale einer einfachen Belegung unterscheidet sich dasjenige (mit W bezeichnete) einer Doppelbelegung hauptsächlich dadurch, dass bei letzterem die Relationen stattfinden: $W_a - W_i = 4 \pi \mu$; $\frac{\partial W_a}{\partial n} - \frac{\partial W_i}{\partial n} = 0$ während bei ersterem gerade das Umgekehrte, nämlich

$V_a - V_i = 0$; $\frac{\partial V_a}{\partial n} - \frac{\partial V_i}{\partial n} = -4\pi\varrho$, der Fall ist; selbstverständlich sind hierin die Grenzwerte der betreffenden Funktionen auf der äusseren (a), resp. inneren (i) Seite der Fläche zu nehmen.

Mit der Erforschung der Potentialeigenschaften von Doppelbelegungen beschäftigte sich zuerst eingehender (1861) Lipschitz,[9]) der die von Green, Gauss und Dirichlet aufgestellten Fundamentalsätze für Potentiale einfacher Belegungen auf Potentiale von Doppelbelegungen übertrug, für diese den Dirichlet'schen nachgebildete Kriterien (§ 5) aufstellte, auch einen, auf den Gauss'schen Beweis für die Existenz eines Minimum von Ω (oben S. 30) beruhenden, analogen Nachweis für den Satz gab, dass stets eine Doppelbelegung existirt, deren Potential W die Bedingung $\frac{\partial W}{\partial n} = f$ erfüllt, wenn f eine auf der Fläche vorgeschriebene Funktion ist. Die hiebei von Lipschitz angewendeten Methoden sind im Wesentlichen entsprechend den von Green, Gauss und Dirichlet beim gewöhnlichen Potentiale eingeführten. — C. Neumann[10]) hat 1876 in seinen „Untersuchungen" Cap. IV die ganze Theorie der Doppelbelegung ausführlich behandelt, die Potentiale in Bezug auf ihre Stetigkeit und auf ihren Zusammenhang unter einander, die Beziehungen der Grenzwerte W_{as} und W_{is} zu den direkten Werten W_s auf der Fläche, genauer untersucht und dabei das Vorhandensein von Kanten oder Ecken stets berücksichtigt. Für die Haupt-Eigenschaften der Potentiale von Doppelbelegungen gab Neumann zwei Beweise, von welchen der zweite an Strenge nichts zu wünschen übrig lässt; es zeigte sich dabei, dass diese Potentiale einer strengeren mathematischen Behandlung fähig sind, als diejenigen einfacher Belegungen. Für die Relation $\frac{\partial W_{as}}{\partial p} = \frac{\partial W_{is}}{\partial p}$, worin p eine beliebige Richtung bezeichnet, vermochte Neumann keinen strengen Beweis zu liefern, es ergab sich ihm später (1880), dass in der That diese Gleichung nur dann richtig ist, wenn p normal zur gegebenen Fläche steht.

Die Potentiale von Doppelbelegungen treten uns häufig entgegen. So ist aus der oben (S. 30) angegebenen Formel ersichtlich, dass das Potential V_1 in einem Punkte angesehen werden kann als die Summe der Potentiale einer einfachen Schicht und einer Doppelschicht, die auf der Oberfläche ausgebreitet sind, und deren Dichtigkeiten in dem Elemente $d\sigma$ respective $-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial n}$ und $\frac{1}{4\pi}V$ sind. Ferner treten sie in der Hydro- und Elektrodynamik auf, wo man es mit mehrwertigen Potentialen zu thun hat (§ 11). Lipschitz[11]) zeigte (1861), dass sich gewisse Aufgaben über Verteilung elektrischer Ströme in Leitern ähnlich wie die elektrostatischen auf ein Fundamentalproblem reduciren lassen, nämlich auf das Aufsuchen einer der Green'schen ana-

logen Funktion, deren Differentialquotient nach der Normale zur Fläche in dieser übergeht in den ebenso genommenen Differentialquotienten der reciproken Entfernung vom Pol, die im Übrigen aber die gleichen Eigenschaften wie die Green'sche Funktion besitzt. Eine solche Funktion lässt sich nun vermittelst der Theorie der Doppelbelegung herstellen. — C. Neumann[12]) zeigte (1880), dass die Derivirten der Potentiale sowohl von einfachen als von Doppelbelegungen sich stets in der Form $V + W$ darstellen lassen, worin V das Potential einer gewissen einfachen, W dasjenige einer bestimmten Doppelbelegung bezeichnet.

---

[1]) C. Neumann: Theorie der Elektricitäts- und Wärme-Verteilung in einem Ring. 1864. S. 47: „Ich werde diese Belegung, welche eben nur von geometrischen Verhältnissen, nämlich nur von der Form des Körpers und von der Lage des . . . Punktes i abhängt „die dem Centrum i entsprechende Oberflächenbelegung" nennen." — Ferner C. N:. Untersuchungen etc. S. 339—349 findet sich hiefür die Benennung „Green'sche Belegung."

[2]) Ettingshausen: Über einen Satz Green's, das elektrische Potential betreffend. Sitzungsber. der Wiener Akad. 1848. p. 154. — Kirchhoff, in Fortschritte der Physik im J. 1848 S. 269—272. Vrgl. auch Neumann, Unters. l. c.; Maxwell, Electr. 98. — Helmholtz, Theorie der Luftschwingungen etc. Crelle J. Bd. 57. 1859. S. 6 und 27—30 (auch bei Vorhandensein mehrerer Erregungspunkte gilt das Reciprocitäts-Gesetz.)

[3]) Thomson and Tait; Nat. phil. 527—534. — Maxwell, Electr. 98. — Legebeke; De functie van Green. 1879. p. 23—34.

[4]) C. Neumann: Allgemeine Lösung des Problems über den stationären Temperaturzustand etc. 1862. S. 80—84, oder: Über das Gleichgewicht der Wärme etc. Borch. J. Bd. 62. 1862. — Eine ausführliche Monographie über die Green'sche Funktion lieferte G. J. Legebeke: De functie van Green. 1879. (Diss. Utrecht), in welcher ihre allgemeinen Eigenschaften S. 1—34 dargelegt sind. — S. ferner Heine, Kugelf. II § 29; Betti: Teorica p. 45.

[5]) Riemann-Hatt. § 21—23 u. 33. — S. Legebeke, l. c. S. 19 und Heine, Kugelf. II S. 89 Anm.

[6]) F. Neumann: Vorlesungen über Magnetismus. 1881. § 24.

[7]) C. Neumann: Unters. S. 71—74. 84 u. f. 339—355. Math. Ann. XIII S. 263—271; hier nennt N. die natürliche Belegung ein „neues Prinzip".

[8]) Helmholtz: Über einige Gesetze der Verteilung elektrischer Ströme in körperlichen Leitern u. s. w. Pogg. Ann. Bd. 89. 1853. 211—233 besonders S. 225—230. — Einen Teil des auf Doppelbelegungen Bezüglichen gibt wortgetreu Neumann in Unters. S. 153—156.

[9]) Lipschitz: Beiträge zur Theorie der Verteilung der statischen und der dynamischen Elektrizität in leitenden Körpern. Borch. J. Bd. 58. 1861. 1—53. Einleitung und § 2.

[10]) Neumann: Unters. Cap. IV „die Theorie der sogenannten Doppelbelegung". S. 113—159. Math. Ann. XIII. 271—279. XVI. 1880. 431. — Über die Theorie der Potentiale von Doppelbel. handeln auch Kirchhoff: Vorl. S. 180—184. 193—194. — Betti: Teorica etc. Cap. I § 12 „Funzione potenziale di un doppio strato".

[11]) Lipschitz: l. c. § 2. — S. auch Heine: Kugelf. II S. 92—94.

[12]) Neumann in Math. Ann. XVI. 1880 S. 432—438. Ausführliche Beweise darin angeführter Sätze gab Beltrami in Brioschi Ann. X 1880. p. 46—63.

§ 13.

Die Methoden zur Lösung der Potentialaufgaben.

Die in Bezug auf das Potential sich darbietenden Aufgaben sind zweierlei Art: einmal handelt es sich darum, für eine gegebene Massenverteilung das Potential zu bestimmen, also den Ausdruck $\int \frac{\varrho\, dm}{r}$ oder $\int\int \frac{\varrho\, dm.\ \varrho'\, dm'}{r}$ — zu integriren, andrerseits ist für einen bestimmten Raum eine Funktion aufzusuchen, welche die Potentialeigenschaften besitzt und an der Begrenzung des Raumes in eine daselbst vorgeschriebene Funktion übergeht. Aus beiden setzt sich die dritte Aufgabe zusammen: die Begrenzung eines Körpers oder eine andere Fläche so mit Masse zu belegen, dass die Belegung ein gegebenes Potential hat, oder auch speziell das gleiche Potential für innere oder äussere Punkte besitzt, wie der Körper selbst. Bis jetzt sind Lösungen dieser Aufgaben für nur verhältnismässig wenige Fälle vorhanden, man ist nicht im Besitze einer allgemeinen Lösungsmethode für eine umfassende Klasse von Körpern resp. Flächen, wenn nicht etwa als solche die „Methode des arithmetischen Mittels" von C. Neumann anzusehen wäre, die aber doch nur bei Aufgaben der zweiten Art, den sogenannten Fundamentalaufgaben, auf „Flächen zweiten Ranges, welche nicht zweisternig sind," anwendbar ist.

Verfolgt man die geschichtliche Entwicklung nach dieser Richtung an den einzelnen bis jetzt vorhandenen Lösungen, so bemerkt man, dass dabei gewisse Arten von Funktionen in den Vordergrund treten und eine dominirende Stellung einnehmen, nämlich die sogenannten Kugelfunktionen und die damit verwandten Cylinder-, Kegel-, Lamé'schen Functionen etc.[1]) Die Kugelfunktionen treten zuerst in der Theorie der Attraktion auf bei Legendre, sie verdanken dieser Theorie ihre weitere Ausbildung durch Laplace, Legendre, Poisson u. A., welche in ihnen ein wichtiges Hilfsmittel zur Lösung von Problemen der mathematischen Physik, speciell des Potentials, erkannten. — Wird der auch in der Potentialfunktion vorkommende Ausdruck für die reciproke Entfernung zweier Punkte, bezogen auf Polarcoordinaten: $(R - 2\,R\,\varrho\,cos\,\omega + \varrho^2)^{-\frac{1}{2}}$ in eine nach Potenzen von $\frac{R}{\varrho}$ oder $\frac{\varrho}{R}$ fortschreitende Reihe entwickelt, je nachdem $\varrho > R$ oder $\varrho < R$ ist, so sind es die Coëfficienten dieser Entwicklung, die nach dem Vorgange von Gauss und Heine Kugelfunktionen genannt werden; auch findet man die Benennungen: „Legendre'sche Coëfficienten," wenn sie von einer Variabeln, „Laplace'sche Coëfficienten," wenn sie von zwei Variabeln abhängen, ferner Laplace'sche Funktionen, bei den Engländern „spherical harmonics" etc.; die Bezeichnungen für sie sind: X_n, $X^{(\omega)}$, Y_n, P_n, $P^{(\omega)}$, $P_n\,(cos\,\omega)$ und ähnlich. — Das eigentliche Fundament der Theorie der

Kugelfunktionen liegt in der auf Polorcoordinaten $(\varrho, \vartheta, \varphi)$ transformirten Potentialgleichung $\Delta V = 0$, nämlich:

$$\sin\vartheta \cdot \varrho \frac{d^2(\varrho V)}{d\varrho^2} + \frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{dV}{d\vartheta}\sin\vartheta\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d^2 V}{d\varphi^2} = 0.$$

Wird hierin für V seine Entwicklung: $\Sigma X_n \varrho^n$ eingeführt, so ergiebt sich eine Gleichung:

$$n(n+1)\sin\vartheta\, X_n + \frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{dX_n}{d\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d^2 X_n}{d\varphi^2} = 0,$$

welche oft als Definition der (allgemeineren) Kugelfunktionen aufgestellt wird; man versteht darunter dann eine ganze rationale Funktion von $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta\cos\varphi$, $\sin\vartheta\sin\varphi$, welche dieser partiellen Differentialgleichung genügt. Wird umgekehrt eine Kugelfunktion $n$ter Ordnung X_n mit ϱ^n multiplicirt und werden in dem Produkt die Polorcoordinaten durch rechtwinklige ersetzt, so erhält man eine allgemeine homogene Funktion $n$ter Ordnung in x, y, z, welche ein particuläres Integral der Potentialgleichung $\Delta V = 0$ ist. Laplace stellte das wichtige Theorem auf, dass eine jede willkürlich gegebene Funktion von ϑ u. φ, die von $\vartheta = 0$ bis π und von $\varphi = 0$ bis 2π einwertig und endlich ist, in eine nach Kugelfunktionen fortschreitende Reihe sich entwickeln lässt; in der Folge wurden für diesen Fundamentalsatz Beweise gegeben von Poisson, Dirichlet, Bonnet, Resal, Darboux, Dini u. A. Dieser Satz in Verbindung mit dem vorigen gab die Mittel an die Hand, die fundamentalen Potentialaufgaben für die Kugel sowie für eine hievon wenig abweichende Fläche, das Sphäroïd, zu lösen, was denn auch teilweise oder ganz von Laplace, Legendre, Poisson, Green, Gauss, Dirichlet, Heine u. A.[2]) ausgeführt wurde. Auch die Potentiale von Kugeln und Kugelschalen, bei welchen die Dichtigkeit eine ganze rationale Funktion der Coordinaten ist, wurden durch Reihenentwicklungen nach Kugelfunktionen dargestellt von Green, Heine, Glaser.[3])

Die Lösungen der Potentialaufgaben für Kugel und Kugelschale zeigten einen Weg, die Lösungen für andere Körper und Flächen in ähnlicher Weise zu versuchen. Eine dabei öfters hervortretende Methode besteht darin, dass man die partielle Differentialgleichung $\Delta V = 0$ nach geeigneter Umformung zu integriren suchte, dann aus denjenigen Lösungen, welche der Endlichkeit und Stetigkeit genügen, einen Ausdruck bildete, welcher an der gegebenen Fläche sich in die daselbst vorgeschriebene Funktion verwandelt; war dies gelungen, so hatte man noch nachträglich den Nachweis dafür zu liefern, dass die gefundenen Ausdrücke allen an sie gestellten Bedingungen genügen, da die Existenz eines allen Forderungen genügenden Integrals zuerst vorausgesetzt wurde. Eine Hauptrolle kam dabei der Einführung geeigneter Coordinaten zu. Nach dieser Richtung waren die Arbeiten von Lamé[4]) epochemachend und bahnbrechend, der von den isothermen Flächen

ausgehend das System der dreifach orthogonalen, krummlinigen Coordinaten, speziell zur Behandlung des Ellipsoidproblems die sogenannten elliptischen Coordinaten im Raume, einführte. Ist irgend ein Körper gegeben, für dessen inneren oder äusseren Raum die Gleichung $\Delta V = 0$ stattfinden soll, so ist ein System krummliniger orthogonaler Coordinaten ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 zu suchen, so dass die den Körper begrenzende Fläche in einer der drei sich rechtwinklig schneidenden Flächenschaaren enthalten ist, und hierauf ΔV in das gewählte Coordinatensystem zu transformiren. Die Formeln für eine solche Transformation stellte zuerst Lamé auf; später gaben Jacobi und Somoff einfache Methoden an, um ΔV für beliebige Coordinaten umzuwandeln[5]. — Der Gleichung $\Delta V = 0$ sucht man dann zu genügen durch eine Particularlösung von der Form $V = R_1 \cdot R_2 \cdot R_3$ oder $V = \lambda R_1 \cdot R_2 \cdot R_3$, wo R_1 eine Funktion von ϱ_1 allein, R_2 und R_3 Funktionen von ϱ_2 resp. ϱ_3 allein sind. Diese enthalten ausser den betreffenden Coordinaten noch zwei willkürliche Parameter, die verschiedenen Particularlösungen unterscheiden sich durch den Wert dieser Parameter; λ ist eine Funktion von ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, welche jene Parameter nicht enthält. Die allgemeine Lösung ist gebildet aus der Summe aller Particularlösungen. Gelingt die Ausführung dieser Operationen, so sind die Potentialaufgaben zurückgeführt auf die einfachere: Eine beliebig gegebene Funktion einer Variabeln in eine Reihe zu entwickeln, die fortschreitet nach den Integralen einer gewöhnlichen Differentialgleichung mit einem veränderlichen Parameter, nämlich derjenigen, durch welche eine der Funktionen R bestimmt ist[6].

Auch noch ein zweiter, etwas längerer aber sicherer Weg wurde zur Lösung von Potentialaufgaben eingeschlagen; derselbe hat mit dem soeben scizzirten manche Berührungspunkte, wie etwa das Einführen geeigneter Coordinaten, geht aber von der am Anfange dieses § zuerst genannten Aufgabe aus. Bei dieser handelte es sich anfangs hauptsächlich darum, den Ausdruck für V in solche Formen zu bringen, die sich für eine angenäherte Berechnung und Bestimmung der Componenten daraus eignen, oder die auf einfache Ausdrücke führen, wenn besondere Annahmen über Dichtigkeit etc. gemacht werden. Später war man bestrebt, für V solche Ausdrücke zu finden, bei welchen verschiedene Eigenschaften des Potentials hervortreten, namentlich der Zusammenhang des Potentials des Körpers mit demjenigen seiner mit Masse zu belegenden Oberfläche und der dabei stattfindenden Flächen-Dichtigkeit; diese Ausdrücke leiteten dann zur Aufsuchung der Potentialfunktion aus bestimmenden Eigenschaften hin. Man betrachtete nämlich die auf der Fläche σ vorgeschriebene Funktion als das Potential in σ einer nur innerhalb σ, ferner einer nur ausserhalb σ befindlichen Körpermasse, und bildete die Fortsetzungen in den jeweils mit Masse nicht erfüllten Raum; beide Fortsetzungen fasste man zusammen als eine Funktion auf, welche dann die gesuchte Funktion ergab. Die zur Anwendbarkeit des Dirichlet'schen Princips zu machenden Voraussetzungen über Fort-

setzbarkeit einer Funktion sind hier sowohl bei dem Körperpotentiale erfüllt, wie auch bei der Green'schen Funktion, welche bei dieser Lösungsmethode öfters auftritt und von grossem Nutzen ist (s. oben S. 53). Eine wesentliche Rolle kommt dabei ferner der Entwicklung der reciproken Entfernung zweier Punkte sowie der Aufstellung einer Funktion für die Flächendichtigkeit zu.

C. Neumann verdankt man eine mit dieser zusammenhängende Methode zur Lösung des Potentialproblems (sowohl des äusseren als des inneren), die auf eine ziemliche Anzahl von Flächen anwendbar ist, nämlich auf alle Flächen, „die zweiten Ranges und keine zweisternigen sind." Darunter hat man solche Flächen zu verstehen, bei welchen 1) ihre sämmtlichen Punkte auf derselben Seite einer beliebigen Tangential-Ebene liegen; 2) keine zwei Flächenpunkte von solcher Lage vorhanden sind, dass jedwede Tangentialebene durch einen dieser beiden Punkte geht. Neumann[7]) gab seine „Methode des arithmetischen Mittels" in ihren Hauptumrissen 1870 an, entwickelte und begründete sie später 1877 in seinen „Untersuchungen". Sie gründet sich auf die Potentialeigenschaften von Doppelbelegungen (§ 12) und liefert die gesuchten Potentialfunktionen V_a und V_i in Form von unendlichen, wesentlich geometrischen Reihen, die fortschreiten nach den Potenzen eines gewissen, der gegebenen Fläche zugehörigen Parameters, eines ächten Bruches. Zunächst ergeben sich die Funktionen als Potentiale von Doppelbelegungen, können aber leicht mit Hilfe eines Green'schen Satzes in diejenigen einfacher Belegungen umgewandelt werden. Die Bildung der Reihen erfolgt nach einem gewissen, leicht aufzustellenden Schema, doch kann hierauf sowie auf das Übrige der Methode in Kürze nicht näher eingegangen werden. Neumann unterstellte auch die von Beer[8]) 1856 publicirten, in ähnlichen Reihenentwicklungen bestehenden und ebenfalls auf die Theorie der Doppelbelegung basirten Methoden einer eingehenden Discussion, und zeigte, dass sie in denjenigen Fällen anwendbar sind, in welchen es die Methode des arithmetischen Mittels ebenfalls ist, dass sie jedoch nur zur Lösung des einen (inneren oder äusseren) Problems führen, wenn die Lösung für das andere bereits bekannt ist, während die Methode des arithmetischen Mittels die Lösung beider unabhängig von einander liefert. Ferner zeigte Neumann, dass zur Lösung der Probleme bei der magnetischen Induction die Beer'sche Methode auf jede beliebige Fläche anwendbar ist, falls nur die sog. Magnetisirungsconstante einen gewissen Kleinheitsgrad nicht überschreitet.

Es möge hier eine kurze Aufzählung derjenigen Körper und Flächen folgen, für welche Lösungen der Potentialaufgaben der einen oder anderen, am Anfange dieses § erwähnten Art bis jetzt vorhanden sind. Der Kugel und Kugelschale wurde schon oben Erwähnung gethan. Ohne Hilfe von Reihenentwicklungen behandelten Probleme bei der Kugel C. Neumann 1861, dann Riemann, Kötteritzsch, Lege-

beke,[9]) welche auch die Green'sche Funktion für die Kugelfläche aufsuchten. Schlömilch[10]) stellte ebenfalls ohne Zuhilfenahme der Kugelfunktionen Potentialausdrücke für einige Fälle von nicht homogenen Kugelschalen auf.

Die Lösung der Potentialaufgaben für ein System von 2 Kugeln oder Kugelflächen, welche sich gegenseitig ausschliessen, hat von Poisson an bis zur neuesten Zeit eine grosse Literatur hervorgerufen; von den äusserst zahlreichen Bearbeitungen seien genannt diejenigen von Poisson, Murphy, Plana, Thomson, Kirchhoff, Riemann, Dirichlet, C. Neumann, Frosch, Bobylew, Betti, Cayley, Momber, Prix, Mehler, Frost, Heine, Seydler, Maxwell[11]). Durch Anwendung der von W. Thomson[12]) zuerst eingeführten orthogonalen Coordinaten für Rotationskörper, die C. Neumann „dipolare" Coordinaten nannte und welche in der Folge bei Behandlung genannter Körper fast immer zu Grunde gelegt wurden, gelang die Lösung nach den oben angeführten Methoden für einen von 2 nicht concentrischen Kugeln begrenzten Körper sowie für den Kreisring durch C. Neumann und Heine; für letzteren Körper wurde auch eine Lösung von Riemann versucht[13]). Lösungen für die Kugelcalotte gaben Thomson, Lipschitz, Mehler, C. Neumann, Heine, Betti, ferner Mehler für einen von zwei Kugelcalotten begrenzten Körper, sowie für einen Körper, welcher durch Rotation eines Kreisbogens um die begrenzende Sehne entsteht. Leonhardt behandelte die Potentialaufgaben für einen durch Rotation zweier Kreisbogen um die gemeinschaftliche Sehne entstehenden Körper[14]).

Am zahlreichsten sind die das Ellipsoid betreffenden Arbeiten, von welchen einige gelegentlich schon erwähnt wurden. Sehr bekannt ist der Ausdruck für das Potential eines homogenen Ellipsoids, den Dirichlet mit Hilfe eines discontinuirlichen Faktors erhielt; die von Dirichlet befolgte Methode wurde von Schlömilch, Lepschitz, Oberbek auf Ellipsoide von variabler Dichtigkeit, sowie von Mehler auf Schalen, welche durch 2 ähnliche Flächen zweiten Grades begrenzt sind, angewendet. Über das Potential des homogenen Ellipsoids handelten ferner: Mertens, Padova, Clarke, Wassmuth, Züge, letzterer berechnete das Potential aus demjenigen der Kreisschnitte mit Hilfe des von Heine aufgefundenen Potentialausdrucks für eine homogene Kreisscheibe; Somoff leitete es durch eine Vereinfachung und Abänderung des Gauss'schen Verfahrens (Theoria attr.) direkt ab.[15]) — Die Potentiale von Schalen, welche zwischen zwei homotetischen Ellipsoidflächen enthalten sind, von aus solchen Schalen zusammengesetzten Ellipsoiden, von Ellipsoiden, deren Dichtigkeit nach bestimmten Gesetzen variirt u. s. w., wurden untersucht von Legendre, Chasles, Schlömilch, Chelini, Moigno, Kötteritzsch, Oberbek, Ferrers, Dini, Betti, Niven, Frost, Beltrami u. A.[16]). — Das Aufsuchen

des Potentials aus bestimmenden Eigenschaften gelang, nach den oben angedeuteten Methoden, bei dem Rotationsellipsoide Lamé, Heine, F. Neumann und Lipschitz[17]), bei dem dreiaxigen Ellipsoide Lamé (1839), Heine (1842)[18]); dabei traten wieder die Kugelfunktionen, dann aber die sog. Lamé'schen Funktionen auf, durch deren Verallgemeinerung, wie F. Klein[19]) in neuester Zeit zeigte, die fundamentale Potentialaufgabe für einen von irgendwelchen confocalen Flächen zweiten Grades begrenzten Körper sich erledigen lässt.

Über Potentiale von Körpern, welche von anderen Flächen zweiten Grades, oder von Flächen zweiten Grades und Ebenen begrenzt sind, handeln: Hirst, Mehler, Gusserow, Grube[20]); über Cylinder und Kegel: Grube, Röthig, Riemann, Lamb, Heine, Betti[21]). Fundamentalprobleme lösten für den unendlichen Kreiscylinder Kirchhoff, für den endlichen Kreiscylinder und elliptische Cylinder (spezielle Fälle): Heine, H. Weber; für den Kreiskegel: Mehler und Heine, für das Rotationsparaboloid: C. Baer[22]). Auch für noch einige andere Flächen wurden diese Probleme gelöst oder wenigstens ihre Lösung angebahnt, so von Wangerin für eine Rotationsfläche von der Form: $(x^2 + y^2 + z^2)^2 + Ax^2 + By^2 + Cz^2 = + D^2$, von Mehler für das zweifache Rotationshyperboloid, von C. Baer für einen wulstförmigen Körper, der dadurch entsteht, dass man vom Rückkehrpunkte einer Cardioide an diese alle Radienvektoren zieht und über denselben als Durchmesser Kreise senkrecht zur Ebene der Cardioide beschreibt[23]). (S. ferner § 14.)

Von speziellen Fällen sind noch folgende zu erwähnen: Kessler bestimmte das Potential der Kreislinie, des Kreisringes und der Kreisfläche für Punkte ihrer Ebene, Heine, Betti, Riemann und Cayley dasjenige einer Kreisfläche und einer Ellipsenfläche für beliebige Punkte, für diese Flächen gaben Heine und Lipschitz auch die Lösung des Fundamentalproblems[24]). Das Potential eines homogenen Parallelepipeds wurde angegeben von Bessel und Röthig, die Green'sche Funktion für Punkte im Innern desselben stellte Riemann, dann Kötteritzsch und Legebeke auf[25]). Potentialausdrücke für homogene Polyeder und Polygone verdankt man Mehler, Mertens, Cayley, Betti, für das homogene Tetraeder Günther, für das sphärische Dreieck Hoppe[26]).

Das Potential zweier homogener Ellipsoide auf einander behandelte Mertens, das Potential eines homogenen Polyeders in Bezug auf ein anderes oder auf ein homogenes Ellipsoid untersuchte Liebenthal[27]).

[1]) In Bezug auf Theorie und Geschichte der Kugel- und der damit verwandten Funktionen, sowie wegen der Benennungen und Bezeichnungen, sei auf folgende Werke verwiesen: Heine: Handbuch der Kugelfunctionen. 1861; zweite Auflage Bd. I 1878. Bd. II 1881. — Todhunter, hist. attr. in den

zahlreichen, im Index unter „Laplaces coefficients and functions“ angezeigten Stellen. — Todhunter: An elementary treatise on Laplaces, Lamés and Bessel's functions. 1875. — Sidler, Theorie der Kugelfunctionen. 1861. — Thomson and Tait: Nat. phil. I. Appendix B. — Resal: Méc. céleste. 1865. p. 155—184. — Dirichlet-Grube, Abschnitt IV: „Potential und Kugelfunctionen.“ — Maxwell: Electr. Part. I Chapter IX; eine eigenartige Darstellung von ganz neuen Ausgangspunkten, was auch bei Thomson a. Tait der Fall ist. — Laplace und Legendre bearbeiteten systematisch die von ihnen geschaffene Theorie der Kugelfunctionen, ersterer in seiner Mécanique céleste t. II livre III; und t. V livre XI; letzterer in Exercices de Calcul Intégral. II. 1817, p. 247—273 und Traité des fonctions elliptiques t. I. — Die Literatur über Cylinder- oder Bessel'sche Funktionen stellte Heine: Kugelf. I S. 189 zusammen; über Kegelfunktionen s. man Heine Hdb., sowie einige der noch später zu citirenden Abhandlungen Mehler's und C. Neumann: Die Mehler'schen Kegelfunctionen. Math. Ann. XVIII 195—236.

[2]) Laplace und Legendre l. c. — Poisson Mémoire sur l'attraction des Sphéroides. Conn. de Tems p. 1829. 1826. p. 329—379, u. 1828 p. 49—57. — Green, Essay. 10. — Gauss, Theorie des Erdmagnetismus. art. 14 u. Allg. Lehrs. 35. — Dirichlet: Über einen neuen Ausdruck zur Bestimmung der Dichtigkeit auf einer unendlich dünnen Kugelschale, wenn der Werth des Potentials derselben in jedem Punkte ihrer Oberfläche gegeben ist. Abh. der Berliner Akad. vom J. 1850. S. 99—116. Dirichlet-Grube § 24—26. — Heine, Hdb. II § 18—31.

[3]) Green Mathematical investigation concerning the laws of the equilibrium of fluids analogous to the electric fluid, with other similar researches. Trans. Cambr. Phil. Soc. 1833; Math. papers p. 119—183. — Glaser: Ein Beitrag zur Potentialtheorie. Diss. Bonn 1880. — Heine l. c.

[4]) Lamé, Mémoire sur les surfaces isothermes etc. Liouville J. II. 1837. 147—183 und andere Abhandlungen; besonders Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications. 1859. Die Lamé'schen Arbeiten über krummlinige Coordinaten waren der Ausgangspunkt für einen neuen, vielfach kultivirten Zweig der Mathematik; vrgl. z. B. Salmon, Analytische Geometrie des Raumes II. Zusätze; Chasles, Rapport etc. an vielen Stellen. Somoff, Mechanik I Cap. VIII.

[5]) Lamé l. c. u. Mém. des Savants étrangers. V. — Jacobi: Über eine particulare Lösung der partiellen Differentialgleichung $\Delta V = 0$. Cr. J. Bd. 36. S. 113—134. — Somoff: Moyen d'exprimer directement en coordonnées curvilignes quelconques, orthogonales ou obliques, les paramètres différentiels du premier et du second ordres etc. Mem. de l'Ac. de St. Petersbourg. VIII. 1865. — Eine Zusammenstellung der verschiedenen Methoden zur Transformation von ΔV gibt Heine, Hdb. I. S. 304—309; s. ferner Moigno, Méc. analyt. p. 366—385; Betti Teorica § 2; Kötteritzch, Elektrostatik S. 15—20. Somoff, Mechanik II S. 114—121.

[6]) Diese Methode findet man bei mehreren der später zu erwähnenden Beispiele. Man vergl. Heine, Hdb. II § 26. 38. 48. 60. — Wangerin: Über die Reduktion der Gleichung $\Delta V = 0$ etc. Monatsberichte der Berliner Akad. 1878 S. 152 u. f.

[7]) Neumann: Unters. Cap. V. — Berichte der sächs. Ges. der Wiss. 1870. — Math. Ann. XIII 279—290.

[8]) Beer: Allgemeine Methode zur Bestimmung der elektrischen und magnetischen Induction. Pogg. Ann. Bd. 98. 1856. S. 137. — C. Neumann, Unters. Cap. VI.

[9]) C. Neumann, Lösung des allgemeinen Problems über den stationären Temperaturzustand einer homogenen Kugel. 1861. (s. § 10 Anm. 3.) — Riemann-Hatt. § 29—32. — Kötteritzsch, El. S. 37—42. — Legebeke, De functie van Green. S. 35—49.

[10]) Schlömilch, Über das Potential der Kugelschale. Schlöm. Ztschr. VII. 1862. S. 207—213.

[11]) Poisson, Mém. de l'Acad. 1811. — Murphy, Elementary principles of the theories of electricity etc. 1833. Cap. V. — Plana, Mém. de l'Acad. de Turin. 1845. Thomson, Phil. Mag. 1853 oder Reprint. p. 86—97. — Kirchhoff, Cr. J. Bd. 59. 1861. — Riemann-Hatt. § 48—53, oder Kötteritzsch, Elektrostatik S. 177—214. — Dirichlet-Grube § 27—31. — C. Neumann, Borch. J. Bd. 62 1862. Frosch, Schlöm. Zeitschr. XIII 497—514. — Bobylew, Math. Ann. VII 1874. S. 396—410. — Betti, Teorica p. 197—223. — Cayley, Phil. Magaz. V 1878. p. 54—61. — Momber, Beitrag zur Lösung des Poisson'schen Problems über die Verteilung der Elektricität auf 2 leitenden Kugeln. Diss. Königsberg 1878. — Prix, Unters. der Anziehung zweier mit Elektricität geladener Kugeln. Progr. Glauchau 1872. — Mehler, Zur Theorie der Verteilung der Elektricität in leitenden Körpern. Progr. Elbing 1879. Math. Ann. XVIII. — Frost, Quart. J. 1880. — Heine, Hdb. II § 68—71. — Seydler, Prag. Ber. 1878. 331—339. — Maxwell El. 171—175.

[12]) Thomson, Extraits de deux lettres addressées à M. Liouville. Liouv. J. XII 1847. Repr. p. 146 f. — C. Neumann. Allg. Lösung etc. u. Borch. J. Bd. 62. — S. auch Somoff Mechanik I Cap. VII.

[13]) Neumann, Allgemeine Lösung des Problems über den stationären Temperaturzustand eines homogenen Körpers, welcher von zwei nichtconcentrischen Kugelflächen begrenzt ist. 1862, auszüglich in Borch. J. Bd. 62. 1862. — C. Neumann, Theorie der Elektricitäts- und Wärmeverteilung in einem Ring. 1864. — Riemann, Über das Potential eines Ringes, Werke S. 407—412. — Heine, Hdb. II. § 68—74.

[14]) Thomson, Liouv. J. XII 1847. p. 263. Reprint p. 152—154 und ib. p. 178—191 (aus dem J. 1869). — Lipschitz Borch. J. Bd. 58. 1861. S. 152—173. — Mehler, Borch. J. Bd 68. 1868. 134—151. — Neumann, Abh. der k. sächs. Gesellschaft, math. Klasse XII. 1880. — Heine, Hdb. II. § 75. — Betti, Teorica 241—263. — Mehler, Über eine mit den Kugel- und Cylinderfunktionen verwandte Funktion etc. Progr. Elbing 1870. abgedr. Math. Ann. XVIII. — Leonhardt: Über die Verteilung der Elektricität auf einem durch Rotation zweier Kreisbogen um die gemeinschaftliche Sehne entstehenden Körper. Diss. Halle 1881.

[15]) Dirichlet: Über eine neue Methode zur Bestimmung vielfacher Integrale. Abh. der Berl. Ak. vom J. 1839. (s. Schell, Mechanik 1870. S. 690—701). — Schlömilch: Der Attraktionscalcul. 1851. — Lipschitz, Borch. J. Bd. 61. 1861. — Oberbeck, Über das Potential des Ellipsoids. Archiv für Math. Bd. 58. 1875. 113—126. Diese Arbeit ist reich an interessanten Resultaten. — Mehler, Borch. J. Bd. 60 321—342. — Padova, Sulla funzione potenziale di un ellisoide non riferito ai suoi assi principali. Cimento 1866. 436—439. — Mertens, Borch. J. Bd. 70 1869 S. 1—9. — Wassmuth, Archiv f. Math. Bd. 62. — Clarke, Phil. Mag. IV. 1877. p. 458. — Züge, Math. Ann. X. 1877 S. 273—295. — Somoff, Bulletin de l'Acad. de St. Petersb. XIX. 1873 p. 215—225 oder Mechanik II S. 192—211; ib S. 211—214 gibt Somoff eine kurze geschichtliche Darstellung der Untersuchungen über das Potential des homogenen Ellipsoids. — Thomson and Tait Nat. phil. 522—525. — Riemann-Hatt. § 24.

[16]) Legendre, Traité de fonctions ellipt. I p. 593. — Chasles, Liouville J. V 1840. — Schlömilch und Oberbeck sind Anm. 15 citirt. — Chelini, Memorie dell' Istituto di Bologna I. 1862. 3—52. — Moigno, Méc. analyt. p. 470—498. — Kötteritzsch, Schlöm. Zeitschr. XVIII. 1873. 252—279. — Ferrers, Quart. J. XIV. 1875. 1—22. — Dini, Atti dell' Academia R. dei Lincei. II. 1875 689—707. — Betti, Teorica p. 67—93. — Niven, Phil. Trans. t. 170. 1879 p. 379—416. — Frost, Quart. J. XVII. 1880. — Beltrami, Mem. di Bologna I, 1880 p. 573—616. — Ein ziemlich vollständiges

Verzeichniss der Literatur, besonders der älteren, über Anziehung und Potential des Ellipsoids gibt Jullien: Problemes de Mécanique 2 Ed. t. II p. 310, sowie Todhunter hist. attr. (bis etwa zum Jahre 1830).

[17]) Lamé: Sur l'équilibre des températures dans . . . les ellipsoïdes de révolution. Liouv. J. IV. 1839 p. 851—385 (inneres Problem). — Heine, Über einige Aufgaben, welche auf partielle Differentialgleichungen führen. Cr. J. Bd. 26. 1843 S. 185—216 (inneres und äusseres Problem). — F. Neumann: Entwicklung der in elliptischen Coordinaten ausgedrückten reciproken Entfernung etc. Cr. J. Bd. 37. 1848. S. 21—50. — Lipschitz, Beiträge etc. Cr. J. Bd. 58. 1861. S. 1—53. § 3. — S. Heine, Hdb. II § 32—42.

[18]) Lamé: Sur l'équilibre des températures dans un ellipsoïde à trois axes inégaux. Liouv. J. IV. 1839 p. 126—163. Heine: Beitrag zur Theorie der Anziehung und der Wärme. Cr. J. Bd. 29 S. 185—208. Theorie der Anziehung eines Ellipsoids. Cr. J. Bd. 42 S. 70—82. — S. Heine Hdb. II § 43—49. — Doormann, Anwendung der Lamé'schen Funktionen auf Probleme der Potentialtheorie bezüglich des dreiaxigen Ellipsoids und der Fresnel'schen Elasticitätsfläche. Diss. Göttingen 1882.

[19]) F. Klein: Über Körper, welche von Flächen zweiten Grades begrenzt sind. Math. Ann. XVIII 1881. S. 410—427.

[20]) Hirst, Sur le potentiel d'une couche infiniment mince comprise entre deux paraboloïdes elliptiques. Liouv. J. II. 1857 p. 385 und Bourget, ib. III p. 47. — Mehler, Über Anziehung einer von 2 ähnlichen Flächen zweiten Grades begrenzten Schale. Borch. J. Bd. 60 321—342. — Grube, Schlöm. Z. IX. 1864. 279—284 und XIV 1869. 267—289. — Gusserow, Attraktion der Körperstumpfe etc. Diss. Göttingen 1867.

[21]) Grube: De cylindri et coni attractione. Diss. Göttingen 1859. — Röthig, das Potential eines homog. rechtw. Cylinders. Borch. J. Bd. 61. 1863. 180—186. — Riemann-Hatt. § 26—28. Lamb, On the potential of an elliptic cylinder. Messenger VII. 1877 p. 33. — Heine, Hdb. II. § 51—53 u. 65. — Betti, Teorica p. 103—106.

[22]) Kirchhoff, Cr. J. Bd. 48 S. 348—376. H. Weber, Math. Ann. IV. Borch. J. Bd. 75 und 76. — Mehler Progr. Elbing 1870, abgedr. Math. Ann. XVIII 161—194. — Heine, Hdb. II § 50—65. — C. Baer, Über das Gleichgewicht und die Bewegung der Wärme in einem homogenen Rotationsparaboloid. Diss. Halle 1881.

[23]) Wangerin, Reduction der Potentialgleichung für gewisse Rotationskörper auf eine gewöhnliche Differentialgleichung. Preisschr. der fürstl. Jablonowsky'schen Ges. XVIII. 1875 u. ferner: Monatsb. der Berl. Ak. 1878, Borch. J. Bd. 82. — Mehler l. c. — Baer: Die Funktion des parabolischen Cylinders. Progr. Cüstrin 1883.

[24]) Kessler: Über das Potential des Kreises und der Kugelfläche. Diss. Marburg 1856. — Heine, Behandlung einer das Potential einer Kreisscheibe betreffenden Aufgabe. Monatsber. der Berl. Ak. 1854. S. 564—572. Borch. J. Bd. 76 S. 271. — Hdb. II § 41, 52. — Riemann-Hatt. § 27 u. 28. — Betti, Teorica p. 85—94. — Lipschitz, Borch. J. Bd. 58 § 4—7 (Kreisscheibe). — Cayley: On the potential of the ellipse and the circle. Proc. Lond. Math. Society VI. 1875. 38—58.

[25]) Bessel, Zach's monatl. Correspondenz Bd. 27. S. 82. — Röthig, Borch. J. Bd. 58. S. 249—258. — Riemann-Hatt. § 23; Kötteritzsch El. S. 31—36; Legebeke, De functie van Green p. 49—54.

[26]) Mehler, Borch. J. Bd. 66. 1866. 375—382. — Mertens, ib. Bd. 69. 1868. 286—298. Cayley, On the potential of polygons and polyhedra. Proc. L. M. S. VI. 1875. 20—34. — Betti, Teorica, Cap I § XVI u. XVII. — Günther, Prager Ber. 1879 S. 4—16. — Hoppe, Archiv f. Math. Bd. 65. 1880. 57—64.

[27]) Mertens, Borch. J. Bd. 63. 1864. S. 360—372. — Liebenthal: Untersuchungen über die Attraktion zweier homog. Körper. Diss. Greifswald 1880.

§ 14.

Transformation durch die Methode der reciproken Radii vectores.

Durch die Einführung der Methode der reciproken Radien in die Potentialtheorie wurde letztere wesentlich bereichert; einmal gestattete sie, die allgemeine Theorie nach mancher Richtung zu vervollkommnen, wie es z. B. Lipschitz und Christoffel thaten (§ 4), dann lieferte sie ferner ein Mittel, die Potentialaufgaben für eine ziemliche Anzahl von Flächen und Körpern zu lösen, und zwar dadurch, dass mit ihrer Hilfe die Lösungen auf bereits bekannte Fälle zurückgeführt werden können. — Die Methode der Umwandlung geometrischer Gebilde mit Hilfe des Princips der reciproken Radien ist, wie Chasles [1]) zeigte, eine ziemlich alte und findet sich z. B. angewendet bei der stereographischen Projection bei Ptolomäus; als allgemeine Transformationsmethode tritt sie zuerst bei Bellavitis (1836) und dann bei Stubbs (1843) als „Methode der Inversion“ auf. W. Thomson war jedoch der Erste (1845), der sie auf Fragen der mathematischen Physik, speziell der Potentialtheorie, anwendete, indem er zeigte, wie mit ihrer Hilfe aus bereits gelösten Problemen die Lösung anderer durch leicht auszuführende Substitutionen und ohne jede neue Integration sich bewerkstelligen lasse, da zwischen dem Potentiale des ursprünglichen und des transformirten Gebildes einfache, ganz allgemein giltige Relationen bestehen. Thomson nannte die Methode: „Das Prinzip der elektrischen Bilder (electric images)“, die Benennung: „Transformation durch reciproke Radii vectores“ rührt von Liouville her, der die Tragweite der Thomson'schen Entdeckung sofort erkannte, weitere Ausführungen von allgemeinerem Gesichtspunkte daran knüpfte und ihren Zusammenhang mit der Gleichung $\Delta V = 0$ ausführlich erörterte [2]). Lamé machte bei Behandlung von Problemen des stationären Temperaturzustandes in cylindrischen und kegelförmigen Körpern einen ausgedehnten Gebrauch von dieser Methode der Transformation, die er „konische Transformation“ nannte und ihr eine andere, die „cylindrische“ an die Seite stellte [3]). In Deutschland wurde die Theorie durch Dirichlet in seinen Vorlesungen bekannter gemacht, es beschäftigte sich mit ihr dann Helmholtz, der in einem kleinen Aufsatze (1862) diejenigen Fälle zusammenstellte, in denen Potentialaufgaben durch die Methode der reciproken Radien auf bereits gelöste sich reduciren lassen. Lipschitz stellte 1863 die Theorie, welche er „das Princip der sphärischen Spiegelung“ nannte, in sehr allgemeiner, umfassender Weise und in Bezug auf die Potentialtheorie und deren Anwendungen (teilweise nach Liouville) dar [4]). — Die Frage, ob es vielleicht noch andere Transformationen giebt, bei welchen die Lösungen der Potentialprobleme für die transformirten Gebilde ohne neue Integration sich bewerkstelligen lassen, glaubten Morin und Haton de la Goupillière in ver-

neinendem Sinne beantworten zu können für alle Flächen, mit Ausnahme des unbegrenzten Cylinders, Helmholtz gab jedoch in einer kurzen Notiz 1881 noch eine andere Transformations-Methode an[5]).

Durch Anwendung der Methode der reciproken Radien wurden die Potentialaufgaben für verschiedene Körper und Flächen gelöst. Thomson selbst zeigte, wie die Aufgaben für einen von zwei nicht concentrischen Kugelflächen begrenzten Körper sich auf diejenigen einer concentrischen Kugelschaale reduciren lässt; in der von ihm angedeuteten Weise behandelten dann die Probleme Dirichlet, Frosch, Betti, Heine, Maxwell; Frosch zeigte ausserdem, dass die so erhaltenen Resultate mit den von C. Neumann in anderer Weise gewonnenen vollständig übereinstimmen. Auf Kugelcalotten und linsenförmige Körper wurde die Methode von Lipschitz, Heine, Betti und Maxwell angewendet[6]). — Die Lösungen für die Fresnel'sche Elasticitätsfläche wurden durch Inversion aus denen für das Ellipsoid von Zimmermann und Doormann abgeleitet, C. Baer gab, von dem Rotationsparaboloid ausgehend, die Lösung für einen Körper, welcher durch Rotation einer Cardioide um ihre Achse entsteht, ferner zeigte er, wie durch Behandlung des am Ende des vorigen § genannten wulstförmigen Körpers nach der Methode der reciproken Radien auch die Lösungen für den unendlichen hyperbolischen und parabolischen Cylinder angebahnt sind[7]).

---

[1]) Chasles: Rapport sur les progrès de la géomètrie p. 133. 140—146. — S. auch Reye: Synthetische Geometrie der Kugeln und linearen Kugelsysteme. 1879. Einleitung, wo die Einführung der Methode Plücker 1834. (Cr. J. XI 219—225) zugeschrieben wird. — Vrgl. ferner einen Aufsatz Hirst's über quadratische Inversion in Proc. of London M. S. 1865.

[2]) W. Thomson. Extrait d'une lettre à M. Liouville. Journ. d. M. X 1845. p. 364—367. — Extraits de deux lettres addressées à M. Liouville ib. XII 1847. 256—264. — Liouville, Note au sujet de l'article précédent. ib. XII 265—290. — Der Wiederabdruck der Thomson'schen Briefe und der Liouville'schen Abhandlung befindet sich in Thomson's Reprint of papers etc. p. 144—177; s. auch die Note daselbst auf S. 52.

[3]) Lamé: Leçons sur les coord. curv. p. 237—256.

[4]) Wegen der Dirichlet'schen Vorträge hierüber vrgl. Heine Hdb. II S. 257. — Helmholtz: Über eine allgemeine Transformationsmethode der Probleme über elektrische Verteilung. Verh des naturh. Vereins zu Heidelberg. 1862. II. 185—188; abgedruckt in: Wissensch. Abh. I S. 520—526. — Lipschitz: Untersuchungen über die Anwendung eines Abbildungsprinzips auf die Theorie der Verteilung der Elektrizität. Borch. J. Bd. 63. 1863. 1—21 § 1 u. 2. (§ 3 enthält die Anwendung auf ein kreisförmig begrenztes Segment einer Kugelfläche).

Eine Darstellung der Theorie mit Bezug auf das Potential geben noch: Thomson and Tait, Nat. phil. 510—517; Betti, Teorica p. 107—116. 229 u. f. Heine Hdb. II S. 251 ff.; Somoff, Mechanik I 133—140. II S. 255—258; Maxwell, El. 155—185.

[5]) Morin, Sur un mode de transformation des figures employé dans la théorie de la chaleur. Comptes rend. 1865. p. 477—479; H. de la Goupillière

Lettre à M. Bonnet. ib. 569 und Sur la transformation etc. ib. t. 73. 1871. — Helmholtz, Wissenschaftliche Abhandlungen. 1882. S. 523.

[6]) Dirichlet, Heine, Lipschitz, Betti, Maxwell l. c. Anm. 2 und 4; Frosch, Schlöm. Zeitschr. XIII. 1868. S. 497—514. XVII. 1872. 498—507.

[7]) Zimmermann: Über die Verteilung der statischen Elektrizität auf einem Conduktor, welcher die Gestalt einer durch Rotation entstandenen Fresnel'schen Elastizitätsoberfläche hat. Diss. Göttingen 1881. — Doormann und Baer in den § 13. Anm. 18, 22 und 23 citirten Abhandlungen.

§ 15.

Das logarithmische Potential.

Ein besonderes Interesse in analytischer Beziehung bildet das Potential eines in der Richtung der Erzeugenden nach beiden Seiten hin unbegrenzten Cylinders. Laplace[1]), welcher es zuerst genauer untersuchte, fand, dass es eine von nur zwei Variabeln (x, y) abhängige Funktion ist, welche die Gleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$ erfüllt, wenn die den Erzeugenden parallele Axe des Cylinders als z-Axe genommen wird. Als allgemeines Integral obiger Gleichung (die ebenfalls mit $\Delta V = 0$ bezeichnet wird) fand Laplace einen Ausdruck von der Form $V = f(x + y\sqrt{-1}) + \varphi(x - y\sqrt{-1})$, worin f und φ willkürliche Funktionen bedeuten. Ferner zeigte Laplace, dass die nach dem Newton'schen Gesetze erfolgende Anziehung eines Punktes durch einen solchen Cylinder sich ersetzen lässt durch eine der ersten Potenz des Abstandes umgekehrt proportionale Anziehung, herrührend von einer Masse, welche über die Schnittfläche des Cylinders mit der durch den Punkt gehenden und auf den Erzeugenden senkrechten Ebene verteilt ist. Die Wirkung zweier Massenteilchen m und m' auf einander in der Entfernung r ist dann proportional $\frac{mm'}{r}$, ihr Potential $V = mm' \log \frac{1}{r}$ $= -mm' \log r$. Lamé[2]), der sich bei Untersuchung des stationären Temperaturzustandes in Cylindern vielfach mit dieser Funktion V beschäftigte, nannte sie „potentiel cylindrique"; der jetzt allgemein dafür gebräuchliche Name „logarithmisches Potential" wurde ihr 1861 von C. Neumann[3]) gegeben, der sie difinirte als: ein Potential, herrührend von in einer Ebene ausgebreiteten fingirten Massen, deren Teilchen umgekehrt proportional ihrer Entfernung auf einander wirken. Durch eine solche Annahme ergiebt sich eine Theorie des Potentials in der Ebene, die fast parallel läuft mit der bisher betrachteten, für das Newton'sche Anziehungsgesetz geltenden, im Raume, welch letztere man zur Unterscheidung die Theorie des Newton'schen Potentials nennt[4]). — In manch' anderen Gebieten der mathematischen Physik kommt dem logarithmischen Potential eine nicht unwesentliche Bedeutung zu; so spielt es eine hervor-

ragende Rolle in der Theorie der elektrischen Strömung in Flächen, in welche es 1845 durch Kirchhoff[5]) für ebene leitende Flächen eingeführt und 1875 durch das Princip der conformen Abbildung auf gekrümmte leitende Flächen übertragen wurde. In der Hydrodynamik wurde es von Helmholtz[6]) zur Untersuchung gewisser Strömungen und Flüssigkeitsstrahlen angewendet. Seine hervorragendste Stellung jedoch erlangt das logarithmische Potential in der reinen Mathematik vermöge seiner Beziehung zur allgemeinen Funktionentheorie, so zur Theorie der Funktionen einer komplexen Variabeln, zum Dirichlet'schen Princip, zur Theorie der conformen Abbildung[7]).

Doch bevor hierauf näher eingegangen wird, sei einiges das Potential selbst Betreffende hervorgehoben. Die für das Newton'sche Potential geltenden Formeln und Sätze lassen sich im Allgemeinen fast ohne Weiteres auf das logarithmische Potential übertragen, es treten nur an Stelle der Körper ebene Flächen, an Stelle der Grenzflächen die Grenzcurven. So existirt hier eine der Laplace-Poisson'sche analoge Gleichung $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -2\pi\varrho\right)$, es gelten die Green'schen Formeln und Theorme, die Gauss'schen Sätze sammt ihren Erweiterungen durch C. Neumann, ferner giebt es hier eine Theorie der Doppelbelegung, eine Methode der reciproken Radien u. s. w. Die grosse Analogie tritt deutlich hervor in einer parallelen Behandlung beider Theorien, wie sie z. B. C. Neumann in umfassender Weise in seinen „Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential" 1877 durchführte und wie aus der eigenartigen Darstellung Somoff's in seiner „Theoret. Mechanik" II 1879 ersichtlich ist. Die Theorie der Doppelbelegung erweiterte Neumann beim logarithmischen Potential, indem er seine Untersuchungen hierüber auch auf nicht geschlossene Curven ausdehnte (l. c. Cap. VI); überhaupt muss Neumann als der eigentliche Schöpfer einer Theorie des logarithmischen Potentials betrachtet werden, da er seit 1861 in zahlreichen Abhandlungen dieselbe eingehend behandelte, den grössten Teil der betreffenden wichtigen Resultate zu Tage förderte und sie schliesslich als selbständige Disciplin hinstellte[8]). — Ein wesentlicher Unterschied jedoch, der die Ursache mancherlei Divergenzen in den betreffenden Theorien ist, zeigt sich in dem Verhalten der Potentiale selbst für unendlich ferne Punkte: während das Newton'sche Potential hiefür $= 0$ wird, wird das logarithmische $= \infty$. Ferner zeigt sich in der Theorie der natürlichen Belegung (§ 12) ein weitgreifender Unterschied; das einer solchen Belegung entsprechende constante Newton'sche Potential einer Fläche für innere Punkte ist stets positiv und grösser als Null, während das correspondirende logarithmische Potential einer Curve in einem gewissen Falle, den Neumann als „singulären Fall" bezeichnet, gleich Null wird[9]).

Fasst man nach Betrachtung der Theorie des logarithmischen Potentials an und für sich ihre Beziehungen zu der von Riemann in seiner Inaugural-Dissertation: „Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen complexen Grösse, 1851“ geschaffenen modernen Funktionentheorie näher ins Auge, so findet man, dass beide zum grössten Teile enge mit einander verknüpft sind, und dass die Methoden und Theoreme des einen Gebietes dem anderen wesentliche Dienste leisten. Ja man kann sagen, dass sie in grossen Hauptpartien identisch sind, wenn man nicht die mehr mathematisch-physikalische Seite von der rein mathematischen ein und desselben Gegenstandes trennen und erstere der Theorie des Potentials, letztere der Funktionentheorie zuweisen will. Beide beschäftigen sich mit der Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$ unter gewissen Stetigkeits- und Grenz-Bedingungen für einen gegebenen ebenen Bereich, mit der Untersuchung der Eigenschaften und Aufstellung der entsprechenden Funktionen. Die Hauptaufgabe beider concentrirt sich in dem Probleme: eine Funktion φ der rechtwinkligen Coordinaten x, y zu suchen, welche sammt ihren Derivirten in einem bestimmten Bereiche, mit Ausnahme einzelner Stellen, endlich und stetig ist, daselbst die Gleichung $\Delta\varphi = 0$ erfüllt, und an der Grenze dieses Bereiches, sie selbst oder ihre Derivirten, in eine daselbst willkürlich gegebene Funktion stetig übergeht. Die Lösung dieses Problems, oder wenigstens der Nachweis der Existenz einer solchen Funktion nebst allenfallsiger Erforschung weiterer Eigenschaften derselben, bildet den Angelpunkt beider Theorien.

Von Einzelheiten seien folgende hervorgehoben. In der erwähnten Schrift nimmt Riemann die Green'schen Formeln zum Ausgangspunkte, um vermittelst derselben die Beziehungen zwischen einem Flächen- und dem Rand-Integrale herzustellen (ebenso verfahren C. Neumann, Harnack u. A.), die dann für die weiteren Untersuchungen von wesentlichem Nutzen sind [10]). Ganz Analoges ist in der Potentialtheorie der Fall; hier spielen die zwischen dem Flächenpotential und dem Potential der die Fläche begrenzenden Curve stattfindenden Relationen eine dominirende Rolle (s. § 7). Von dem, für beide Theorien wichtigen, Dirichlet'schen Principe und den gegen dasselbe erhobenen Einwänden war schon früher (§ 9) die Rede. Der ursprüngliche Riemann'sche Beweis seiner Giltigkeit für die Ebene wurde teilweise abzuändern und zu ergänzen gesucht von H. Weber, ferner suchte man ihn zu ersetzen mit Zuhilfenahme von Potentialbetrachtungen und Fourier'sche Reihen-Entwicklungen (C. Neumann und Lipschitz), gegen die aber Heine und Prym Bedenken erhoben [11]). Schliesslich wurden, um die Riemann'schen Sätze über Integration der Gleichung $\Delta\varphi = 0$ abzuleiten, namentlich um die Existenz der Funktion φ nachzuweisen, an Stelle

des Dirichlet'schen Princips Methoden angewendet, welche sich teils auf das Princip der conformen Abbildung auf den Kreis stützen (Christoffel, Schwarz), teils in einem combinatorischen, alternirenden Grenzverfahren bestehen (Schwarz)[12]. F. Klein[13] umgeht bei seiner Behandlung der Funktionentheorie ebenfalls das Dirichlet'sche Princip ganz und gar, er geht dabei von physikalischen Betrachtungen aus, welche enge mit der Potentialtheorie verknüpft sind und in ihr ihren eigentlichen Ursprung haben, wie: Geschwindigkeitspotential, stationäre Strömungen, Niveau- und Strömungs-Curven, durch letztere vermittelte conforme Abbildung von Flächen aufeinander, wie sie von Kirchhoff 1875 zuerst angegeben wurde, u. s. w. Durch die von Klein eingeschlagene Behandlungsweise gewinnt die Funktionentheorie sowie die Theorie der conformen Abbildung einen grossen Grad von Anschaulichkeit und Zusammenhang, der gerade vermittelst Potentialbetrachtungen hergestellt wird, und so von Neuem die innige Verwandtschaft dieser Theorien illustrirt.

Die vorhin genannten Methoden führen die Lösung des Hauptproblems (S. 70) auf solche Fälle zurück, für welche Lösungen bereits gefunden sind oder durch bekannte Methoden sich auffinden lassen. Kann man nämlich einen Bereich conform auf einen andern, für welchen eine Lösung bekannt ist, in der Art abbilden, dass die erste Ableitung der Abbildungsfunktion im Innern einmal 0 oder ∞ wird, so ist die Aufgabe auch für ersteren gelöst. Nun existiren mehrfache Lösungen des Problems für den Bereich einer Kreisfläche, teilweise selbst bei Vorhandensein von Ausnahmestellen, von Neumann, Schwarz, Prym, Christoffel, Dini, Schläfli, Lipschitz, Veltmann[14]; auch die, die conforme Abbildung auf die Kreisfläche vermittelnde Funktion f wurde für eine ziemlich grosse Anzahl von Flächen aufgestellt von Christoffel, Schwarz, Hentschel, Holtzmüller u. A.[15]. Das Aufsuchen der Funktion f ist im Verhältniss zu dem ursprünglichen Probleme einfacher, da ausser den Bedingungen der Endlichkeit, Stetigkeit und $\Delta f = 0$ nur noch hinzukommt, am Rande gleich dem Logarithmus der Entfernung von einem gewissen festen Punkte zu werden. Dies ist, im Grunde genommen, ein Problem der Potentialtheorie und besteht in dem Aufsuchen der Green'schen Funktion für einen Bereich bei gegebenem Pole. Die Green'sche Funktion ist nämlich beim logarithmischen Potentiale diejenige spezielle Potentialfunktion, welche am Rande in den Logarithmus der Entfernung vom Pole übergeht; ist sie für einen beliebigen Punkt innerhalb eines gegebenen Bereiches gefunden, so ist sie auch dadurch, wie C. Neumann 1861 zeigte[16], für jeden anderen Punkt desselben Bereiches bekannt, und hierin liegt ihre erhöhtere Bedeutung gegenüber derjenigen, welche sie in der Theorie des Newton'schen Potentials einnimmt (s. oben S. 53). Dass mit Hilfe der Green'schen Funktion sich die allgemeinere Potentialaufgabe lösen lasse, wurde schon früher erwähnt. Umgekehrt kann man, wenn

letztere gelöst ist durch irgend welche (andere) Methode, das entsprechende Problem der conformen Abbildung lösen, wie Neumann[17]) zeigte; und hier tritt uns abermals der innige Zusammenhang der in Rede stehenden Theorien entgegen.

Die Lösung der Potentialaufgaben führte Neumann 1878[18]) anstatt auf die Ermittelung der Green'schen Funktion auf diejenige einer gewissen anderen speciellen Potentialfunktion zurück, welche nebst den bekannten Bedingungen die Eigenschaft besitzt, am Rande der Fläche in den reciproken Wert des Durchmessers des Krümmungskreises der Curve im jeweiligen Punkte überzugehen. Neumann bemerkte jedoch selbst, dass diese neue Methode gegenüber der Green'schen keine wesentlichen Vorteile darbietet. — Sind am Rande nicht die Werte der zu suchenden Funktion selbst, sondern die ihrer ersten Derivirten gegeben, so lassen sich, wie Dini[19]) zeigte, die Potentialaufgaben ebenfalls auf das Aufsuchen einer der Green'schen analoge Funktion reduciren.

Die andere oben erwähnte, combinatorische Methode wurde zuerst von Schwarz angegeben und später von C. Neumann weiter ausgeführt[20]). Sie ist zur Lösung der Aufgaben anwendbar bei solchen Gebieten, welche sich aus anderen einfacheren zusammensetzen lassen, für welche einzeln bereits das Verlangte geleistet ist.

Eine weitere allgemeine Methode, anwendbar auf Curven zweiten Ranges, wurde von C. Neumann[21]) ausser derjenigen des arithmetischen Mittels, die er 1877 in seinen „Untersuchungen" ausführlich erörterte, (s. oben S. 60) noch 1878 mitgeteilt; sie besteht in Reihenentwicklungen nach gewissen Funktionen, „Elementarpotentiale" genannt, die in Bezug auf ihre Integral- und sonstigen Eigenschaften grosse Analogie mit den Kugelfunktionen aufweisen.

Nach Anführung der Methoden wären wieder die Fälle einzeln aufzuzählen, für welche Lösungen der Potentialprobleme existiren; es möge jedoch die Nennung der hauptsächlichsten Arbeiten hierüber genügen, da die behandelten Specialfälle hier nicht so zahlreich sind und ausserdem im Verhältnisse zur allgemeinen Theorie eine mehr untergeordnete Stellung einnehmen. Die Arbeiten über die Kreisfläche, die teilweise auch den Kreisring mitbehandeln, wurden schon oben (S. 71) erwähnt. Die Probleme für die Ellipsenfläche und für die von zwei confocalen Ellipsen begrenzte Fläche löste Meutzner[22]) nach verschiedenen Methoden, darunter auch nach der des arithmetischen Mittels. Zum grössten Teil wurden Specialfälle behandelt bei Untersuchungen über stationäre Strömungen in leitenden Flächen; so bestimmte Heine die Potentiale elliptischer und rechteckiger Platten durch die Methode der conformen Abbildung auf den Kreis, Jochmann das Potential der rechteckigen Platte durch eine Methode der Spiegelung gewisser Punkte, der Ein- und Ausströmungspunkte, an den Seiten des Rechtecks, und Zimmermann nach beiden Methoden das log. Potential einer gleichseitig-dreieckigen Platte[23]). Andere, mehr oder weniger

hieher zu rechnende Untersuchungen wurden ausgeführt von Auerbach, v. Bezold, Chwolson, Lodge und Forster, Maxwell, Guébhard, H. Mayer, Hildebrandt, Holtzmüller[24]).

[1]) Laplace, Mécanique cél. liv. II, 13; vrgl. Todhunter, hist. attr. 1048—1050. — Die betreffenden Laplace'schen Entwicklungen unterwarf Matthiessen einer genaueren Untersuchung in: Über das Integral der Gleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$. Schlöm. Z. XVI. 1871. S. 228—239.

[2]) Lamé, Leçons sur les coord. curv. p. 171—216. Ferner Haton de la Goupillière: Mémoire sur une nouvelle théorie générale des lignes isothermes et du potentiel cylindrique. Journ. de l'Ecole polyt. XXII. 1861 p. 15—112 oder Comptes rendus. t. 48. 1859.

[3]) C. Neumann: Über die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$. Borch. J. Bd. 59. 1861. 335—366.

[4]) Den Übergang vom Newton'schen zum logarithmischen Potentiale zeigt in hübscher Weise Kirchhoff, Vorl. S. 194 ff.; s. ferner Somoff, Mechanik II S. 218 u. Heine, Hdb. II S. 179.

[5]) Kirchhoff, Über den Durchgang eines elektrischen Stromes durch eine Ebene, insbesondere durch eine kreisförmige. Pogg. Ann. Bd. 64 und 67. u.: Über die stationären Strömungen in einer gekrümmten leitenden Fläche. Monatsber. der Berliner Ak. 1875. — Einen kurzen geschichtlichen Überblick über die Theorie der stationären el. Strömung in Flächen nebst einem Verzeichnisse der Literatur giebt Hildebrandt, Die stationäre elektr. Strömung etc. Diss. Göttingen 1881. S. 5. — S. besonders Maxwell El. Part. I, Chapter XII.

[6]) Helmholtz, Über discontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen. Monatsbericht der Berliner Akad. 1868. 215—228. — Vrgl. auch Kirchhoff, Vorlesungen 20—22; Auerbach, Theoretische Hydrodynamik. §§ 26, 27, 42.

[7]) Man sehe z. B. Lamé's mehrfach citirte Schriften über inverse Funktionen und über orthog. Coord.; die in Anm. 2 genannte Abh. von H. de la Goupillière; besonders Kirchhoff, Vorl. 21 S. 274—290. Maxwell El. Part. I Ch. XII „Theorie of conjugate functions in two dimensions." — Somoff, Mechanik II S. 125 ff. — Schwarz, Über ebene algebraische Isothermen. Borch. J. Bd. 77. 38—46. — F. Klein, Riemann's Theorie etc. 1882. — Holtzmüller, Isogonale Verwandtschaften etc. 1882. — Neumann, Unters. S. 3 Anm. oder Math. Ann. XIII. S. 255.

[8]) Ausser in schon citirten und noch zu erwähnenden Abhandlungen wurden unseren Gegenstand betreffende Untersuchungen von Neumann geführt in: Zur Theorie des Potentials. Math. Ann. II. 1870. (Der hier aufgestellte Satz über Aequipotentialität einer Kreisperipherie und eines beliebigen Punktes wurde bewiesen und verallgemeinert von Padova, Sopra due teoremi del H. Neumann. Battaglini Giornale, VIII 1870. 296—301). — Revision einiger allgemeinen Sätze aus der Theorie des logarithmischen Potentials. Math. Ann. III. 1871. 325—349. — Notiz über die elliptischen und hyperelliptischen Integrale. ib. 611—630. — Theorie der Bessel'schen Funktionen. 1867. S. 70 u. f. — Neue Sätze über das logarithmische Potential. Math. Ann. XVI. 1880. 409—431.

[9]) Vrgl. Neumann, Unters. S. 9. 72. 87 u. f.

[10]) Man vergleiche z. B. Neumann, Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale etc. 1865. — Lipschitz, Analysis II 1880. §§ 97. 115 u. f. — Harnack, Differential- und Integralrechnung. 1881. Buch. IV.

[11]) Riemann, Theorie der Abel'schen Funktionen. Borch. J. Bd. 54. 1857; Werke, S. 90—93. — Weber, Note zu Riemann's Beweis des Dirichlet'schen Prinzips. Borch. J. Bd. 71. 1870. 29—39. (s. auch Math. Ann. I 1—36). — Neumann, Das Dirichlet'sche Prinzip in seiner Anwendung auf die Riemann'schen Flächen 1865. — Lipschitz, Analysis II § 124. — Heine, Borch. J. Bd. 71 S. 360 u. f.; Prym, Zur Integration etc. Borch. J. Bd. 73. S. 340. — S. auch Schäfli, Einige Zweifel an der allgemeinen Darstellbarkeit einer willkürlichen periodischen Funktion einer reelen Variabeln durch eine trigonometrische Reihe. Progr. Bern. 1874.

[12]) Christoffel, Über die Abbildung einer . . . ebenen Fläche auf einem Kreise. Göttinger Nachr. 1870 283—298. 359—369; s die Schlussbemerkung auf S. 369 (ferner in Brioschi, Annali di Mat. I. 1867. 89—103 IV. 1870. 1—9). — Schwarz, Zur Theorie der Abbildung. Progr. Zürich 1870. Über Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0$ unter vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen. Monatsber. der Berliner Ak. 1870. 767—795.

[13]) F. Klein, Über Riemann's Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale. 1882.

[14]) Neumann, in der Anm. 3 genannten Abh. — H. A. Schwarz, Über die Integration der partiellen Differentialgl. $\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0$ für die Fläche eines Kreises. Vierteljahresschr. der naturf. Ges. zu Zürich. XV. 1870. S. 113—118; abgedruckt und erweitert: Zur Int. der part. Differentialgl. $\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0$. Boch. J. Bd. 74. 1872. 218—253. — Prym, Zur Integration der Differentialgleichung $\frac{\partial^2u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2u}{\partial y^2} = 0$. Boch. J. Bd. 73. 1871. 340—364. — Christoffel, Über die Integ. von zwei partiellen Differentialgl. Gött. Nachr. 1871. 435—453. Nach Christoffel's Mitteilung gab schon Dirichlet in seinen Vorlesungen 1851—52 die Verification des Ausdrucks von u für eine Kreisfläche, den übrigens Poisson zuerst aufstellte im Journ. de l'Ecole polyt. Cah XIX. 1823. p. 150, 433. — Dini, Sulla integratione dell' equazione $\Delta^2 u = 0$. Annali di Mat. VI. 1873. 305—345; hier ist die Gleichung für die Bedingung integrirt, dass die Werte der Derivirten von u an der Begrenzung gegeben sind. — Schläfli, l. c. Anm. 11. — Lipschitz Analysis II § 124. — Veltmann, Die Bestimmung einer Funktion auf einer Kreisfläche aus gegebenen Randbedingungen. Schlöm. Z. XXVI. 1881. 1—14.

[15]) Christoffel und Schwarz l. c. Anm. 12. — Hentschel, Über einige conforme Abbildungen. Schlöm. Z. XVII. 1872. 39—65. — Holtzmüller in verschiedenen Abhandlungen; s. dessen: Isogonale Verwandtschaften etc. 1882.

[16]) Neumann, l. c. Anm. 3. — S. auch Maxwell, El, 190. Maxwell bemerkt art. 182 in Bezug auf die Green'sche Funktion beim log. Potential: „the method . . . is much more powerful than any known method applicable to three dimensions".

[17]) C. Neumann, Zur Theorie der conformen Abbildung einer ebenen Fläche auf eine Kreisfläche. Math. Ann. XIII. 573.

[18]) C. Neumann, Neue Methode zur Reduktion gewisser Potentialaufgaben. Ber. der Ges. der Wiss. zu Leipzig 1878. S. 1—9.

[19]) Dini, Su una funzione analoga a quella di Green. Atti d. Ac. dei Lincei. III. 1876, p. 129—137. Dini giebt ein entsprechendes, für den Raum anwendbares Verfahren, ebenfalls dabei an.

[20]) H. A. Schwarz, Über einen Grenzübergang durch alternirendes Verfahren. Vierteljahresschr. der naturf. Ges. zu Zürich. XV. 1870. 272—286; ferner Über Integration etc. Berl. Monatsber. 1870. 767—795. — C. Neumann, Unters. Cap. IX; es werden hier drei nicht wesentlich von einander verschiedene Methoden angegeben.

[21]) C. Neumann, Entwicklung nach Elementarpotentialen. Berichte der Ges. der Wiss. zu Leipzig 1878. S. 47—89.

[22]) Meutzner, Untersuchungen im Gebiete des logarithmischen Potentials. Math. Ann. VIII. 1874. 319—358.

[23]) Heine, Über constante elektrische Strömung in ebenen Platten. Borch. J. Bd. 79. 1875. 1—16. — Jochmann, Über einige Aufgaben, welche die Theorie des logarithmischen Potentials und den Durchgang eines constanten Stromes durch eine Ebene betreffen. Schlöm. Z. X. 1865, 48—58, 89—109. Zimmermann, das logarithmische Potential einer gleichseitig-dreieckigen Platte. Diss. Jena 1881.

[24]) Auerbach, Wiedemann Ann. III 1878. v. Betzold, ib.; Chwolson, Schlöm. Z. XXIII. 1878 47—60; Lodge and Forster, Phil. Mag. 1875. 1876; Maxwell, Electr. Part. I. Ch. XII; Guébhard, Comptes rendues t. 90. 1880; H. Mayer, Über stationäre elektrische Strömung in leitenden Flächen. Diss. Göttingen 1880. Hildebrandt, Über stat. el. Strömung in einer unendlichen Ebene und einer Kugeloberfläche. Diss. Göttingen 1881; Holtzmüller, Isogonale Verwandtsch. etc. 1882.

§ 16.

Das Potential im n-dimensionalen Raume, in dreifach sowie mehrfach ausgedehnten Gauss'schen und Riemann'schen Räumen.

Die mathematische Theorie des Potentials wurde in ihrem weiteren Ausbau auch auf solche Räume zu übertragen gesucht, in welchen die Analysis bei verschiedenen anderen Untersuchungen operirt. So wurden zuerst an Stelle der bisher behandelten Potential-Funktionen zweier oder dreier von einander unabhängiger Variabeln die entsprechenden Funktionen mehrerer von einander unabhängiger Variabeln in Betracht gezogen, von welchen erstere dann nur mehr als specielle Fälle erscheinen. In diesem Sinne spricht man von Potentialen einer n-fachen Mannigfaltigkeit, versteht also darunter eine, dem Newton'schen oder logarithmischen Potentiale analoge, analytische Funktion von n von einander unabhängigen Veränderlichen. Im Allgemeinen sind diese Funktionen, sowohl was ihre Existenz und Eigenschaften als auch noch mehr ihre explicite Darstellung in geschlossenen oder auch nicht geschlossenen Formen betrifft, verhältnissmässig noch wenig erforscht, doch lässt sich aus dem bisher Bekannten eine weitgehende Übereinstimmung mit der gewöhnlichen Potentialtheorie erkennen. Als eines der hauptsächlichsten Operationsmittel für die betreffenden Untersuchungen erwiesen sich auch

hier wieder die Green'schen Formeln, deren Verallgemeinerung von Green[1]) selbst in einer wichtigen, aber fast gänzlich unbeachtet gebliebenen Abhandlung zuerst durchgeführt wurde; später wurden sie von Neuem selbständig aufgestellt von C. Neumann, Beltrami, Betti, und in mancher Beziehung vervollständigt von Cayley[2]). Ferner spielen hier wieder eine wichtige Rolle die verallgemeinerten Gauss'schen Theoreme der Theoria attractionis (oben S. 8), besonders das 4. Theorem, dann die Eigenschaften der Differentialparameter und ihre Transformation, mit denen sich sehr eingehend Beltrami, dann Kronecker und Gundelfinger beschäftigten[3]). Von hervorragendster Bedeutung in der ganzen Theorie ist der Differentialparameter zweiter Ordnung, d. i. die Summe der zweiten partiellen Abgeleiteten: $\sum_1^n \frac{\partial^2 V}{\partial x_n^2}$. Es handelte sich zuerst darum, den Werth dieses Ausdrucks für einen gegebenen Raum zu bestimmen, dabei ergab sich eine der Laplace-Poisson'sche ganz analoge Relation (§ 3). Aus den von Kronecker und Cayley durchgeführten Untersuchungen lässt sich weiter entnehmen, dass für Potentiale von n Dimensionen Sätze gelten, welche denjenigen von Green und Gauss für das Newton'sche Potential aufgestellten ganz entsprechen, dass man ferner auch hier zwischen Körper-Potential (n Dimensionen) und Flächen-Potential ($n-1$ Dimensionen) zu unterscheiden habe, und dass diese beiden Potentiale den Gauss'schen Theormen (§ 8 und 9) gemäss in gewissen Wechselbeziehungen zu einander stehen. Diese Sätze geben wieder Veranlassung zu den sogenannten Verteilungsaufgaben oder analytischen Fundamentalproblemen, nämlich: eine Funktion V zu suchen, welche (für einen gegebenen Raum) den Bedingungen über Endlichkeit und Stetigkeit genügt, die partielle Differentialgleichung $\Delta V = 0$, oder hier $\sum_1^n \frac{\partial^2 V}{\partial x_n^2} = 0$ erfüllt, und an gewissen Stellen (der Begrenzung des Raumes) daselbst vorgeschriebene Werte annimmt. Von Caylay, und teilweise schon von Green, wurden solche Funktionen aufgestellt und untersucht für den n-dimensionalen Kugel- und Ellipsoid-Raum; C. Neumann gab eine Lösung für den Kugelraum in Reihenentwicklungen nach verallgemeinerten Kugelfunktionen. Den Nachweis der eindeutigen Existenz der gesuchten Funktion für den Kugelraum und ihre Aufstellung in geschlossener Form lieferte Macher, und Tonelli führte, nebst allgemeineren Untersuchungen, die Lösung der Aufgabe für den Fall durch, dass nicht die Werte von V selbst, sondern die ihrer Derivirten nach der Normale zur Begrenzung des Kugelraumes daselbst vorgeschrieben sind[4]).

Nach einer anderen Richtung wurde die Potentialtheorie von Schering und seinen Schülern Fresdorf und Opitz[5]) dadurch erweitert, dass sie die der Potentialfunktion im Euklidischen Raume entsprechende Funktion im Gauss'schen und Riemann'schen, sowohl

dreifach als mehrfach ausgedehnten Raume untersuchten. Über diese Räume sei nur bemerkt, dass im Gauss'schen Raume die Winkelsumme des ebenen Dreiecks kleiner als 180°, im Riemann'schen diese Summe grösser als 180° vorausgesetzt wird; die Relationen zwischen den Seiten und Winkeln eines gradlinigen Dreiecks in solchen Räumen werden denjenigen bei dem sphärischen Dreieck im Euklidischen Raume formell gleich, wenn man die mit einer beliebigen Längeneinheit gemessenen Seiten mit einer Constante ε multiplicirt in die Gleichungen einführt. Für den Gauss'schen Raum ist ε rein imaginär, für den Riemann'schen reel und für den Euklidischen gleich Null. — Als Ausdruck für die Potentialfunktion in einem Punkte mit der Masseneinheit, herrührend von einem in der Entfernung r befindlichen Punkte mit der Masse m, ergab sich für den dreidimensionalen Raum: $V = m\,\varepsilon\,cotg\,\varepsilon\,r$ (hieraus für den Enklidischen Raum, da $lim\ \varepsilon = 0$, $V = \frac{m}{r}$, die bekannte Gleichung). Bei Vorhandensein von n diskreten Massenpunkten ist $V = \sum_n m_n\,\varepsilon\,cotg\,\varepsilon\,r_n$; ist die Masse continuirlich durch einen Raum τ verbreitet, so hat die Potentialfunktion die Form:

$$V = \int_m dm.\,\varepsilon\,cotg\,\varepsilon\,r = \int_\tau \mu\,d\tau.\,\varepsilon\,cotg\,\varepsilon\,r,$$

wenn μ die Dichte der im Volumenelemente $d\tau$ enthaltenen Masse ist. Für Räume von n Dimensionen gestalten sich die Formeln ganz analog. Zur weiteren Untersuchung der betreffenden Potentialfunktionen wurden hier wieder das Gauss'sche vierte Theorem der Theoria attract. sowie die Green'schen Formeln entsprechend erweitert, aus denen sich dann manche Verallgemeinerung bekannter Potentialtheoreme ergaben.

---

[1]) Green, On the determination of the exterior and interior attractions of ellipsoids of variable densities. Transac. of Cambr. Phil. Soc. 1835, abgedr. in Math. papers of Green. p. 186—222.

[2]) C. Neumann, Kurzer Abriss einer Theorie der Kugelfunktionen. Schlöm. Z. XII. 1867. 97—122. — Beltrami, Sulla teorica generale dei parametri differentiali. Mem. dell' Ist. di Bologna VIII 1869. 549—590; in der Einleitung ist eine kurze Geschichte dieser Theorie gegeben und auf die früheren Bearbeiter Chelini (1853) und Brioschi (1854) verwiesen. — Betti, Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni. Annali di Mat. IV, 1871. 140—158. — Cayley, A memoir on Praepotentials, Phil. Trans. t. 165. 1876. p. 675—775; diese grosse, reichhaltige Abhandlung schliesst sich an die Anm. 1 citirte Green'sche Arbeit an und erschliesst eine reiche Quelle verallgemeinerter Potentialbetrachtungen.

[3]) Beltrami l. c.; Kronecker, Über Systeme von Funktionen mehrerer Variabeln. Monatsber. der Berliner Ak. 1869 S. 135–193 und 688—698; ferner: Über Potentiale n-facher Mannigfaltigkeiten. Collectanea Mathematica, in memo-

riam Dominici Chelini. 1881. 224—231. — Gundelfinger, Über Transformation einer gewissen Gattung von Differentialgleichungen. Borch. J. Bd. 85. 1878. 295—304.

[4]) Green, Cayley und Neumann in den Anm. 1 und 2 citirten Abh. — Macher, Zur Integration der partiellen Differentialgleichung $\sum_1^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_\nu^2} = 0$. Diss. Würzburg 1878. — Tonelli, Über die Potentialfunktion in einem mehrfach ausgedehnten Raume. Gött. Nachr. 1875. S. 521—552; ferner: Sopra la funzione potenziale in uno spazio di n dimensioni. Annali di Mat. X 1882 p. 291—321.

[5]) Schering, Die Schwerkraft im Gauss'schen Raume. Gött. Nachr. 1870. 311—321. Die Schwerkraft in mehrfach ausgedehnten Gaussischen und Riemann'schen Räumen. Gött. Nachr. 1873. 149—159. Die hier ohne Beweise mitgeteilten Sätze wurden für den dreifach ausgedehnten Raum bewiesen von Tresdorf, Über die Geometrie und die Potentialfunktion im Gaussischen und Riemann'schen Raume Diss. Göttingen 1873; und für den n-dimensionalen Raum von P. Opitz, Einige Sätze über die Anziehung in mehrfach ausgedehnten Gaussischen und Riemann'schen Räumen. Diss. Göttingen 1881.